Prefaţă

Realizarea progresului tehnic în toate ramurile industriale în care intervin structuri de rezistenţă necesită atât cunoştinţe multiple şi aprofundate din domeniul Rezistenţei materialelor cât şi deprinderi avansate de calcul .
Reducerea consumului de materiale , ceea ce echivalează cu dimensiuni mai reduse pentru piese , este posibilă numai pe baza unor studii detaliate privind rezistenţa , deformabilitatea ,stabilitatea şi durabilitatea elementelor astfel încât odată cu creşterea performanţelor tehnologice , siguranţa în exploatare , pe toată durata de funcţionare să fie deplină .
Pentru acest lucru , volumul II prezintă noţiunile ştiinţifice, metodele şi procedeele concrete de calcul şi dimensionare ale structurilor sub o formă adecvată atât înţelegerii aspectelor fizice cât şi aplicării lor în cazuri specifice reale din domeniul construcţiei de maşini şi utilaje.
În acest volum s-a continuat linia matematizării totale a tuturor fenomenelor şi explicarea fiecărui detaliu în parte.
Acest mod de lucru , ia o bună parte din timp şi din spaţiu ,dar fără acest stil nu se poate înţelege în mod ştiinţific Rezistenţa materialelor . În acest volum , capitolele au o legătura mare între ele , capitolul VII (Flambajul) în demonstrarea tuturor fenomenelor se porneşte de le ecuaţia fibrei medii deformate , cu condiţiile de rigoare ale fiecărui caz în parte.
În capitolul VIII (Solicitări dinamice prin şoc) se observă legăturile cu solicitările statice şi mai intervin unele condiţii specifice acestui capitol.
La trasarea diagramelor de eforturi pentru barele cotite s-au folosit toate metodele de calcul , încărcările au fost relative simple.

Pentru munca depusă şi sugestiile făcute cu ocazia citirii manuscrisului aduc mulţumiri deosebite referentului ştiinţific prof.dr.ingMarcel Năforniţă.

Autorul

Cuprins volumul II

Capitolul VI

Solictarea la încovoiere
Deformarea barelor drepte solicitate la încovoiere

Capitolul VII
Stabilitatea elastică (Flambajul)

Capitolul VIII

Solicitări dinamice prin şoc

Capitolul IX

Echilibrul sistemelor plane alcătuite din bare rigide legate între ele prin articulaţii

Grinzi cu zăbrele

Capitolul X
Trasarea diagramelor de eforturi pentru barele cotite

Cuprins volumul I

Capitolul I
1. Introducere

Capitolul II
Ipotezele de bază din rezistenţa materialelor

Capitolul III
Solicitarea la întindere sau compresiune

Capitolul IV
Solicitarea la forfecare

Capitolul V
Solicitarea la răsucire

Capitolul VI

Capitolul VI
Solicitarea la încovoiere
Deformarea barelor drepte solicitate la încovoiere

6.13. Integrarea analitică a ecuaţiei diferenţiale a fibrei medii deformate în cazul grinzilor de secţiune constantă şi executate din acelaş material adică ($E_1 = E_2 = E_3 = \ldots = E_n$) cu mai multe câmpuri de variaţie a momentului încovoietor.
Procedeul lui Clebsch sau al identificării constantelor de integrare.

Acest procedeu reduce numărul constantelor de integrare la două C şi D , pe când la metoda analitică se introducea pentru fiecare regiune câte două constante de integrare , ca atare pentru o bară cu trei sau mai multe regiuni, metoda analitică devine destul de complicată .
Procedeul Clebsch impune anumite restricţii :

1) originea de măsură a absciselor se fixează întotdeauna la unul din capetele barei, indiferent dacă este reazem sau capăt de consolă.
2) originea odată aleasă rămâne neschimbată pe tot timpul rezolvării problemei, poziţionarea forţelor (sarcinilor) şi a secţiunilor curente se face numai faţă de această origine.
3) toţi termenii expresiei momentului încovoietor din regiunea (câmpul) precedentă trebuie lăsaţi neschimbaţi ca formă în funcţia momentului încovoietor al regiunii următoare a grinzii.
4) toţi termenii expresiei momentului încovoietor care apar în regiunea următoare, începând cu regiunea a doua, trebuie să conţină binomul ($x_i - a_j$) .
5) integrarea ecuaţiei diferenţiale, trebuie făcută fără a se desface parantezele binomului ($x_i - a_j$)^n .
6) tronsoanele barei să fie din acelaşi material şi secţiunea transversală să fie constantă pe toată lungimea barei. De aici reiese particularitatea acestui procedeu.

Când există de rezolvat integrala de forma: $\int (x_i - a_j)^n dx$; se face schimbarea de variabilă $(x_i - a_j)$ = t ; se diferenţiază

d$(x_i - a_j)$ = dt ; $(x_i - a_j)' dx = dt$; dx = dt ;

$\int (x_i - a_j)^n dx = \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$; unde t = $(x_i - a_j)$, şi

deci $\int (x_i - a_j)^n dx = \frac{(x_i - a_j)^{n+1}}{n+1} + C$.

Să demonstrăm existenţa a numai două constante de integrare C şi D , pentru o grindă încărcată ca în figură, acest caz particular duce prin inducţia matematică la rezolvarea oricărui tip de încărcare. Aplicăm metoda analitică de calcul a săgeţilor şi a rotirilor secţiunilor transversale, pentru fiecare regiune în parte şi ne folosim de faptul că funcţia axei de simetrie deformată trebuie să fie continuă şi derivabilă pe tot domeniul maxim de definiţie.

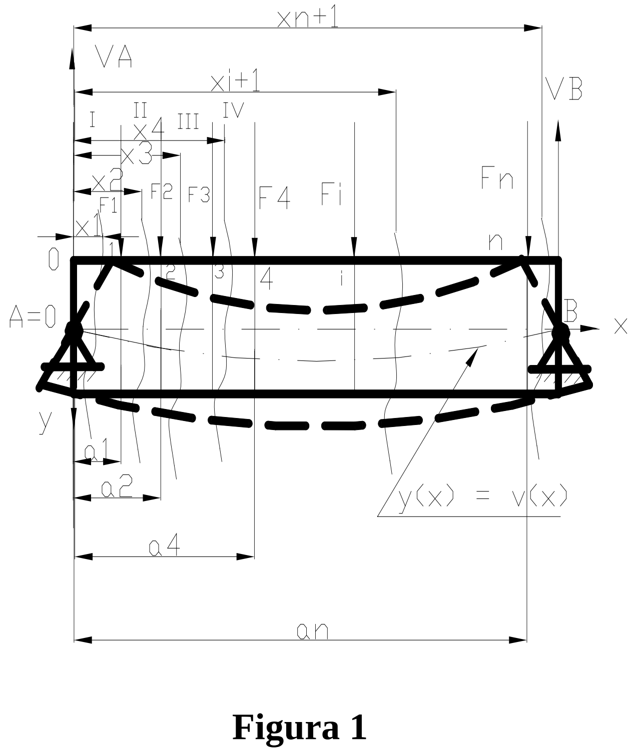


Figura 1

Regiunea întâi

$x_1 \in (0; a_1)$; $M_{iz}(x_1) = V_A x_1$; ; **ecuaţia fibrei medii**

deformate va fi : $EI_z \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = -M_{iz}(x_1) = -V_A x_1$,

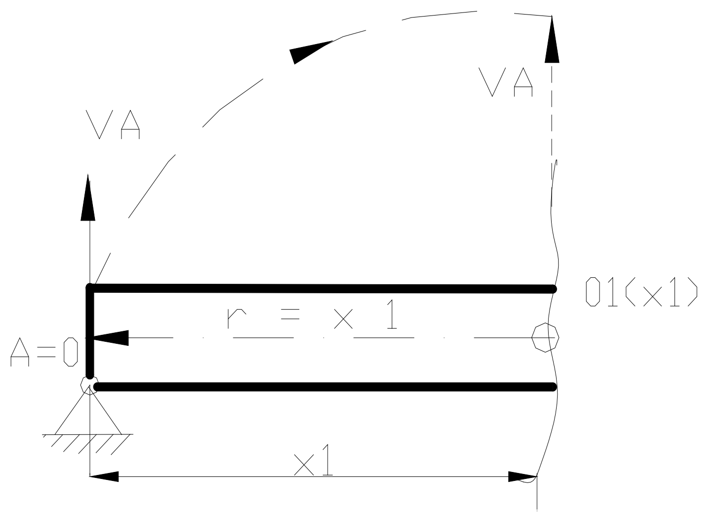


Figura 2

prin integrări succesive se obţin, următoarele expresii;

$$\begin{cases} EI_z \frac{dv_1}{dx_1} = -\frac{V_A x_1^2}{2} + C_1 \\ \hline EI_z v_1(x_1) = -\frac{V_A x_1^3}{6} + C_1 x_1 + D_1 \end{cases};$$

Pentru regiunea a II-a

$x_2 \in [a_1; a_2)$; $M_{iz}(x_2) = V_A x_2 - F_1(x_2 - a_1)$; ecuaţia fibrei medii deformate va fi : $EI_z \frac{d^2 y_2}{dx_2^2} = -M_{iz}(x_2) = -V_A x_2 + F_1(x_2 - a_1)$

prin integrări succesive se obţin, următoarele expresii:

$$\begin{cases} EI_z \dfrac{dv_2}{dx_2} = -\dfrac{V_A x_2^2}{2} + \dfrac{F_1(x_2-a_1)^2}{2} + C_2 \\ \hline EI_z v_2(x_2) = -\dfrac{V_A x_2^3}{6} + \dfrac{F_1(x_2-a_1)^3}{6} + C_2 x_2 + D_2 \end{cases}; \quad (2)$$

Punem condiţiile de continuitate şi derivabilitate ale funcţiilor ce exprimă săgeţile şi rotirile secţiunilor transversale , în secţiunea (1) [funcţia y(x) = v(x) să fie continuă şi derivabilă]. Deci

$$\begin{cases} \dfrac{\lim}{x_1 \uparrow a_1} v_1(x_1) = \dfrac{\lim}{x_2 \downarrow a_1} v_2(x_2) \\ \hline \dfrac{\lim}{x_1 \uparrow a_1} \dfrac{dv_1(x_1)}{dx_1} = \dfrac{\lim}{x_2 \downarrow a_1} \dfrac{dv_2(x_2)}{dx_2} \end{cases}; \quad \text{la fel şi}$$

$$\begin{cases} EI_z \dfrac{\lim}{x_1 \uparrow a_1} v_1(x_1) = EI_z \dfrac{\lim}{x_2 \downarrow a_1} v_2(x_2) \\ \hline EI_z \dfrac{\lim}{x_1 \uparrow a_1} \dfrac{dv_1(x_1)}{dx_1} = EI_z \dfrac{\lim}{x_2 \downarrow a_1} \dfrac{dv_2(x_2)}{dx_2} \end{cases} \quad \text{De unde rezultă :}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-V_A . a_1^3}{6} + C_1 a_1 + D_1 = -V_A \dfrac{a_1^3}{6} + C_2 a_1 + D_2 \\ \hline -\dfrac{V_A . a_1^2}{2} + C_1 = -\dfrac{V_A a_1^2}{2} + C_2 \end{cases}$$

de aici implică $C_1 = C_2$ şi $D_1 = D_2$.

S-a precizat că acest procedeu este limitat la barele executate din acelaş material şi nu variază dimensiunile secţiunilor transversale.

Regiunea a III-a

$x_3 \in [a_2 ; a_3)$; $\quad M_{iz}(x_3) = V_A x_3 - F_1(x_3 - a_1) - F_2(x_3 - a_2)$; ; ecuaţia fibrei medii deformate va fi :

$$EI_z \frac{d^2 y_3}{dx_3{}^2} = -M_{iz}(x_3) = -V_A x_3 + F_1(x_3 - a_1) + F_2(x_3 - a_2)$$

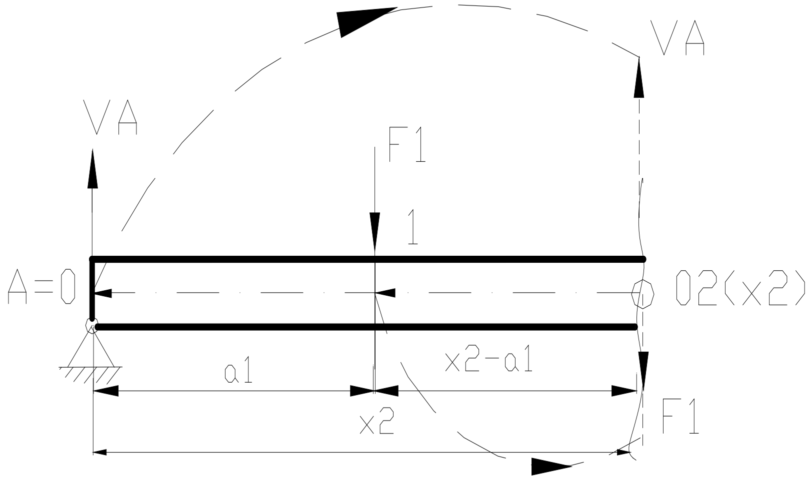


Figura 3

$$\begin{cases} EI_z \dfrac{dv_3}{dx_3} = -\dfrac{V_A x_3^2}{2} + \dfrac{F_1(x_3 - a_1)^2}{2} + \dfrac{F_2(x_3 - a_2)^2}{2} + C_3 \\ \hline EI_z v_3(x_3) = -\dfrac{V_A x_3^3}{6} + \dfrac{F_1(x_3 - a_1)^3}{6} + \dfrac{F_2(x_3 - a_2)^3}{6} + C_3 x_3 + D_3 \end{cases}$$

Punem condiţiile de continuitate şi derivabilitate ale funcţiilor ce exprimă săgeţile şi rotirile secţiunilor transversale , în secţiunea (2) [funcţia y(x) = v(x) trebuie să fie continuă şi derivabilă].

$$\begin{cases} \dfrac{\lim}{x_2 \uparrow a_2} v_2(x_2) = \dfrac{\lim}{x_3 \downarrow a_2} v_3(x_3) \\ \hline \dfrac{\lim}{x_2 \uparrow a_2} \dfrac{dv_2(x_2)}{dx_2} = \dfrac{\lim}{x_3 \downarrow a_2} \dfrac{dv_3(x_3)}{dx_3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{-V_A.a_2^3}{6} + \dfrac{F_1(a_2 - a_1)^3}{6} + C_2 a_2 + D_2 = -V_A \dfrac{a_2^3}{6} + \\ + \dfrac{F_1(a_2 - a_1)^3}{6} + C_3 a_2 + D_3 \\ \hline -\dfrac{V_A.a_2^2}{2} + \dfrac{F_1(a_2 - a_1)^2}{2} + \dfrac{F_2(a_2 - a_2)^2}{2} + C_2 = -\dfrac{V_A a_2^2}{2} + \dfrac{F_1(a_2 - a_1)^2}{2} + \\ + \dfrac{F_2(a_2 - a_2)^2}{2} + C_3 \end{cases}$$

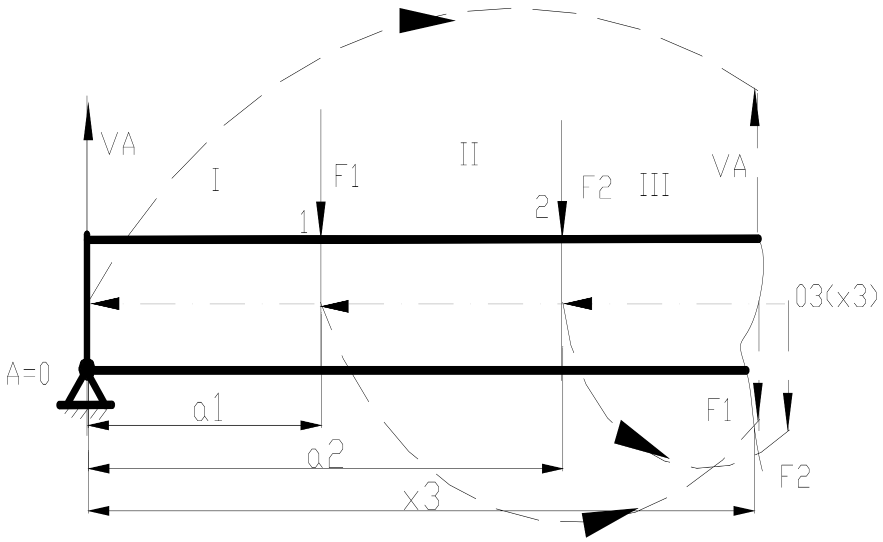


Figura 4

de aici implică $C_1 = C_2 = C_3$ şi $D_1 = D_2 = D_3$.

Prin inducţie matematică rezultă că : $C_1 = C_2 = C_3 = \ldots = C_n = C$ şi $D_1 = D_2 = D_3 = \ldots = D_n = D$, unde

$$\begin{cases} C = EI_z * \varphi_0 \\ D = EI_z * v_0 \end{cases};$$ v_0 este săgeata în origine, iar φ_0 rotirea în origine a secţiunii transversale.

Problema nr.5

Să se calculeze săgeţile şi rotirile secţiunilor transversale Q şi S pentru bara din figura 5, ştiind că :

$E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm^2 ; $q = 6$ N / m ; $l = 0{,}21$ m , secţiunea transversală fiind dreptunghiulară cu $b = 6$ mm şi $h = 8$ mm .

Rezolvare:

Calculăm săgeţile şi rotirile secţiunilor transversale Q şi S cu ajutorul procedeului Clebsch pentru grinda din figura 5, alegem ca origine , articulaţia din (A) .

Se scrie ecuaţia momentului generalizator din ultima regiune (B-S), apoi se calculează expresia funcţiilor pentru săgeţi şi rotiri tot cu

elemente generalizatoare .

$$M_{iz}(x_3) = -5qlx + ql^2(x-l)^0 + \frac{q(x-l)^2}{2} + 9ql(x-3l) -$$
cu ;
$$-\frac{3q(x-3l)^2}{2} + \frac{q(x-3l)^3}{18l};$$

$R_\Delta(x_3) = \left[2q - \frac{q}{3l}(9l-x)\right]\frac{x-3l}{2}$; încărcarea trapezoidală s-a desfăcut într-un triunghi şi într-un dreptunghi. Forţa rezultantă pentru triunghi . $R_\Delta(x_3) = \frac{q}{6l}(x-3l)^2$, forţa rezultantă pentru dreptunghi $R_{dreptunghi}(x_3)=q(x_3)(x_3-3l)$, pentru trapezul dreptunghic variabil din figura 6, s-a aplicat principiul suprapunerii efectelor. Deasemenea pentru a avea în expresia momentului încovoietor termenii binomiali $(x_i - a_j)^n$ s- a pus la momentul încovoietor concentrat $M_{iz}(Q) = ql^2$ braţul $(x - l)^0$ [orice număr la puterea zero este egal cu unu], apoi s-a prelungit funcţia de încărcare q(x) = q din regiunea a II-a [sus şi jos pe aceeaşi lungime (x-3l)] ca urmare a aplicării principiului suprapunerii efectelor.

Funcţia de încărcare pentru regiunea a III-a (fiind triunghiulară) se află din teorema lui Thales :

$\frac{q(x_3)}{2q} = \frac{9l-x}{6l}$; 6l – x + 3l = 9l – x ; $q(x_3) = \frac{2q}{6l}(9l-x)$;

$$R_\Delta(x_3) = \frac{[2q - q(x_3)]}{2}(x-3l) = \frac{\left[2q - \frac{q(9l-x)}{3l}\right]}{2}(x-3l) = \frac{q}{6l}(x-3l)^2$$

$R_{dreptunghi}$= $R_\oplus(x_3) = q(x_3[x-3l] = \frac{q}{3l}(9l-x)(x-3l);$ când se exprimă momentele încovoietoare ale sarcinii distribuite dată de încărcarea trapezoidală faţă de secţiunea (x) , se obţin defalcat momentul încovoietor pentru încărcarea triunghiulară şi respectiv momentul încovoietor pentru încărcarea dreptunghiulară.

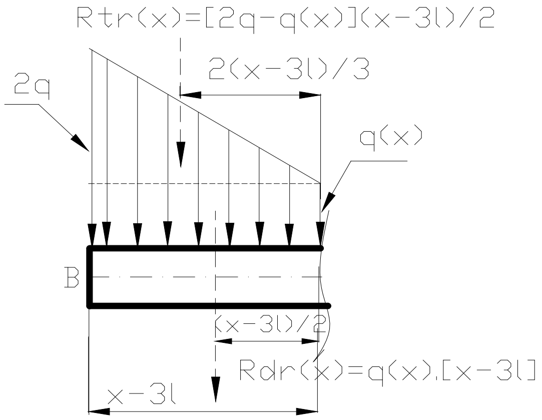


Figura 6

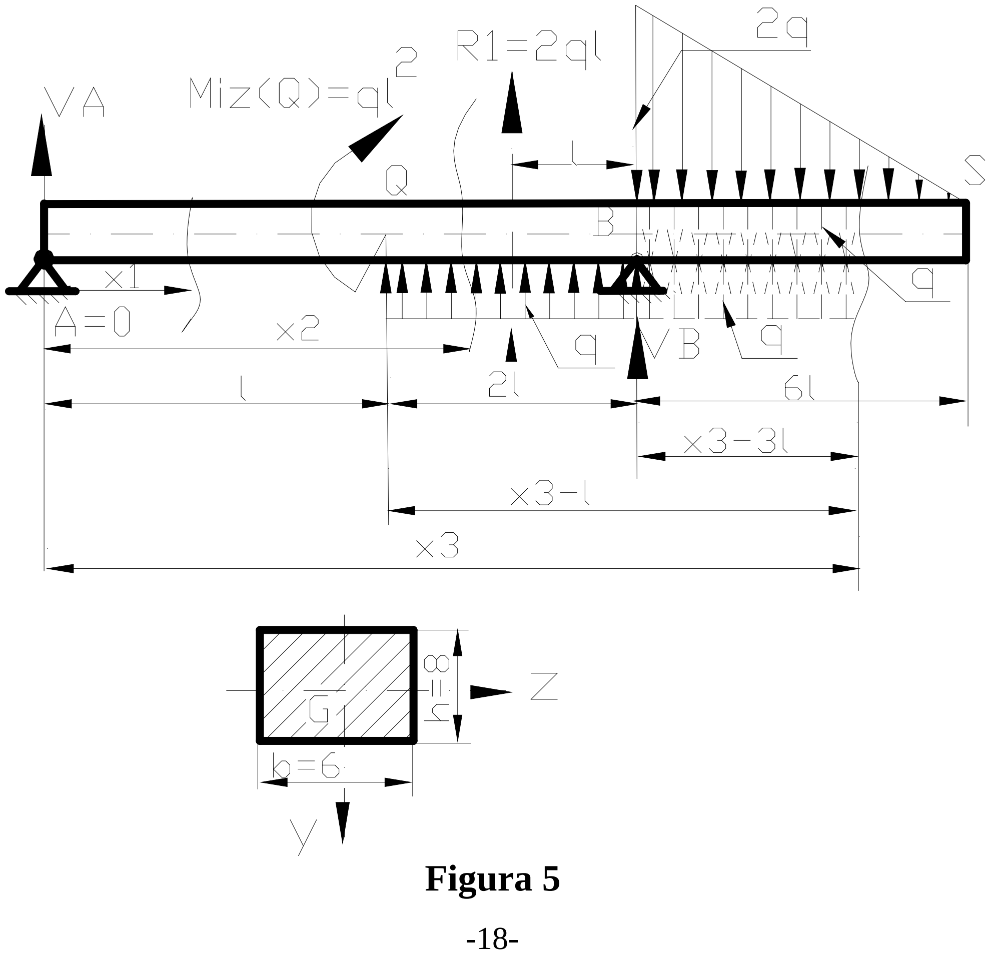


Figura 5

$$M_{izdreptunghi}(x) = -\frac{q}{6l}(9l-x)(x-3l)^2 = \frac{q}{6l}(x-3l-6l)(x-3l)^2 =$$

$$= \frac{q}{6l}(x-3l)^3 - q(x-3l)^2;$$

$M_{iz\oplus}(x) = \frac{q}{6l}(x-3l)^3 - q(x-3l)^2$, momentul încovoietor pentru încărcarea dreptunghiulară din regiunea a III-a ,

$M_{iz\Delta}(x) = -\frac{2}{3}\frac{q}{6l}(x-3l)(x-3l)^2 = -\frac{q}{9l}(x-3l)^3$; momentul încovoietor pentru încărcarea triunghiulară din regiunea a III-a. Momentului generalizator din ultima regiune:

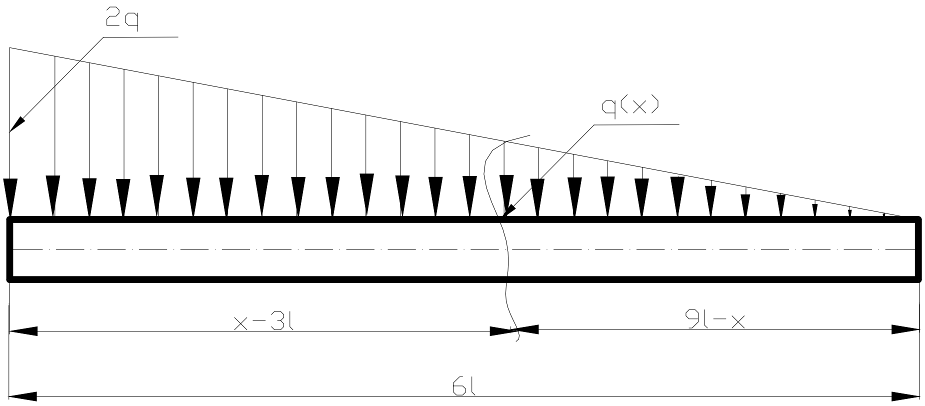


Figura 7

$$M_{iz}(x_3) = -5qlx + ql^2(x-l)^0 + \frac{q(x-l)^2}{2} + 9ql(x-3l) - \frac{3q(x-3l)^2}{2} + \frac{q(x-3l)^3}{18l};$$

Aplicăm ecuaţia fibrei medii deformate:

$$EI_z\frac{d^2y}{dx^2} = -M_{iz}(x\ \ ); EI_z\frac{d^2y}{dx^2} =$$

$$-[-5qlx + ql^2(x-l)^0 + \frac{q(x-l)^2}{2} + 9ql(x-3l) - \frac{3q(x-3l)^2}{2} + \frac{q(x-3l)^3}{18l}]$$

prin integrări succesive se obţin, următoarele expresii;

$$\begin{cases} EI_z \frac{dv}{dx} = \frac{5qlx^2}{2} - ql^2(x-l) - \frac{q}{6}(x-l)^3 - \frac{9ql}{2}(x-3l)^2 + \\ + \frac{q}{2}(x-3l)^3 - \frac{q}{72l}(x-3l)^4 + C \\ \hline EI_z v(x) = \frac{5qlx^3}{6} - \frac{ql^2(x-l)^2}{2} - \frac{q(x-l)^4}{24} - \frac{3ql(x-3l)^3}{2} + \frac{q(x-3l)^4}{8} - \\ - \frac{q(x-3l)^5}{360l} + Cx + D \end{cases}$$

S-au obţinut expresiile săgeţilor şi a rotirilor secţiunilor transversale în forme generalizatoare, se află constantele C şi D din condiţiile de sprijin (de reazem) ale barei. O primă condiţie este :

$\lim_{x_1 \downarrow 0} v_1(x_1) = 0$; la fel şi $EI_z \lim_{x_1 \downarrow 0} v_1(x_1) = 0$; în **regiunea întâi ,** $x_1 \in [0; l)$

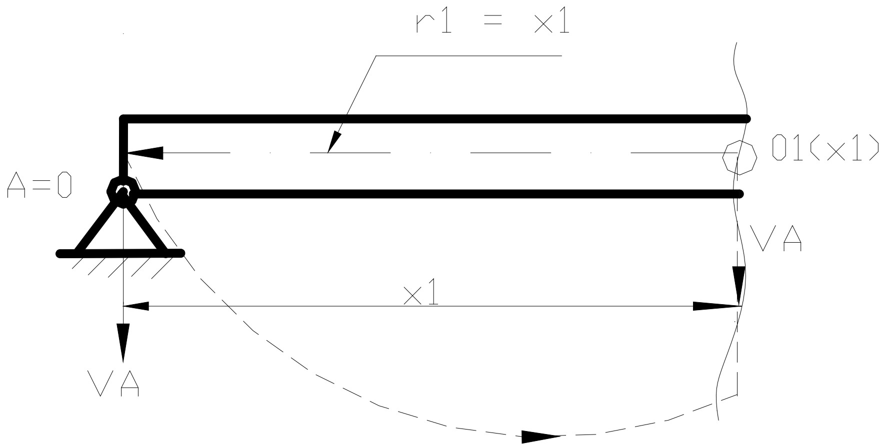


Figura 8

$M_{iz}(x_1) = -5qlx_1$; pentru expresia momentului încovoietor din **regiunea întâi,** se ia din expresia momentului încovoietor generalizator numai primul termen , la fel se ţine cont şi în expresiile săgeţilor sau rotirilor.

$$\begin{cases} EI_z \dfrac{dv_1}{dx_1} = \dfrac{5qlx_1^2}{2} + C \\ \hline EI_z v_1(x_1) = \dfrac{5qlx_1^3}{6} + Cx_1 + D \end{cases}$$

$EI_z \dfrac{\lim}{x_{1\downarrow 0}} v_1(x_1) = 0 = \dfrac{5ql}{6}0^3 + C.0 + D$; D = 0 . A doua condiţie de

reazem va fi: $\dfrac{\lim}{x_2 \uparrow 3l} v_2(x_2) = 0$ .Condiţiile de reazem (de sprijin) sunt cuprinse în condiţiile de continuitate şi derivabilitate ale funcţiei fibrei medii deformate.

În regiunea a II-a , $x_2 \in [l;3l)$;

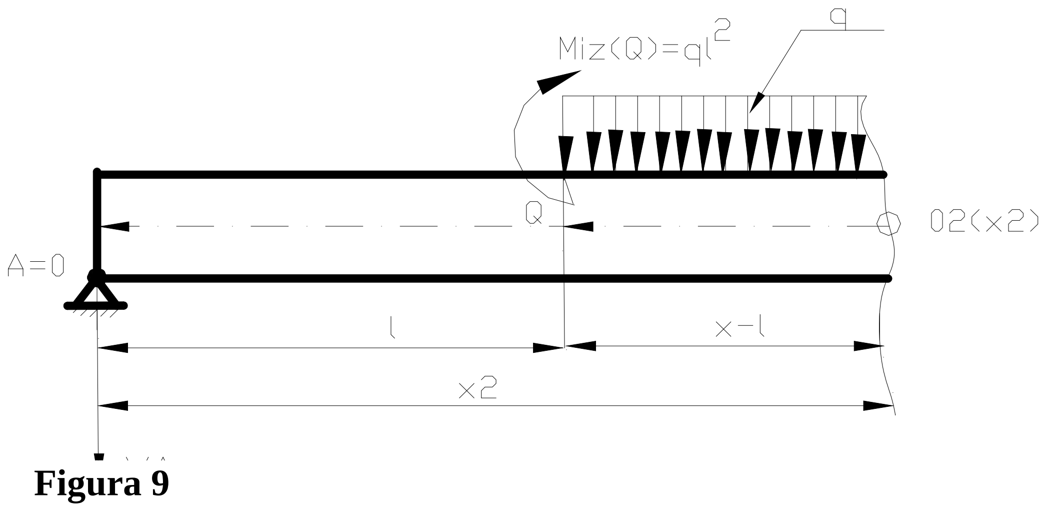


Figura 9

$M_{iz}(x_2) = -5qlx_2 + ql^2(x-l)^0 - \dfrac{q(x-l)^2}{2}$; pentru expresia momentului încovoietor din regiunea a II-a, se ia din momentului încovoietor generalizator numai termenii care dau moment încovoietor pentru regiunea a II-a , în mod analog se procedează la expresiile

săgeţilor şi a rotirilor secţiunilor tranversale , se iau numai primii trei termeni la care se adaugă contribuţia lui C şi D .

$$EI_z \lim_{x_2 \uparrow 3l} v_2(x_2) = 0;$$

$$EI_z \lim_{x_2 \uparrow 3l} v_2(x_2) = 0 = EI_z \lim_{x_2 \uparrow 3l}\left[\frac{5qlx^3}{6} - \frac{ql^2(x-l)^2}{2} - \frac{q(x-l)^4}{24} + Cx + D\right]$$

;

$$\left[\frac{5ql(3l)^3}{6} - \frac{ql^2(3l-l)^2}{2} - \frac{q(3l-l)^4}{24} + C.3l + D\right] = 0;$$

C = - 19,83 ql^3 .

Având determinate constantele de integrare C şi D , s-au obţinut funcţiile săgeţilor şi rotirilor secţiunilor transversale penru orice punct de pe bară .

$$\begin{cases} EI_z \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{5qlx^2}{2} - ql^2(x-l) - \dfrac{q}{6}(x-l)^3 - \dfrac{9ql}{2}(x-3l)^2 + \\ + \dfrac{q}{2}(x-3l)^3 - \dfrac{q}{72l}(x-3l)^4 - 19{,}83ql^3 \\ \hline EI_z v(x) = \dfrac{5qlx^3}{6} - \dfrac{ql^2(x-l)^2}{2} - \dfrac{q(x-l)^4}{24} - \dfrac{3ql(x-3l)^3}{2} + \dfrac{q(x-3l)^4}{8} - \\ - \dfrac{q(x-3l)^5}{360l} - 19{,}83ql^3.x \end{cases};$$

Acum se calculează săgeata şi rotirea în punctul Q , care se află în regiunea întâi deci se ia numai primul termen la care se adaugă cotribuţia C şi D :

$$\lim_{x \uparrow l} v(x) = v_Q = \lim_{x \uparrow l}\left[\frac{5qlx^3}{6} - 19{,}83ql^3x\right]\frac{1}{EI_z} =$$

$$= \frac{1}{EI_z}\left[\frac{5ql^4}{6} - 19{,}83ql^4\right] = -\frac{18{,}996.ql^4}{EI_z}$$

$$v_Q = -\frac{18{,}996.ql^4}{EI_z} = -\frac{18{,}996.\frac{6N}{m}(0{,}21)^4 m^4}{2{,}1.10^5 \frac{N}{mm^2}\frac{6.8^3 mm^4}{12}} = -\frac{18{,}996.6.(0.21)^4.10^9 mm^3}{2{,}1.10^5.256mm^2} =$$

$$= -4{,}12mm$$

$$\frac{\lim}{x \uparrow l}\frac{dv}{dx} = \varphi_Q = \frac{\lim}{x \uparrow l}\left[\frac{5qlx^2}{2} - 19{,}83ql^3\right]\frac{1}{EI_z} = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{5ql^3}{2} - 19{,}83ql^3\right] =$$

$$= -\frac{17{,}33.ql^3}{EI_z}$$

$$\varphi_Q = -\frac{17{,}33.ql^3}{EI_z} = -\frac{17{,}33.\frac{6N}{m}(0{,}21)^3 m^3}{2{,}1.10^5 \frac{N}{mm^2}\frac{6.8^3 mm^4}{12}} =$$

$$= -\frac{17{,}33.6.(0.21)^3.10^6 mm^2}{2{,}1.10^5.256mm^2} = -0{,}01791[rad];$$

v_Q = - 4,12 mm.

Pentru secţiunea din punctul S se iau expresiile generalizatoare , deoarece (S) cade în ultima regiune pentru care s-a făcut momentul încovoietor generalizator.

$$\begin{cases} EI_z\varphi_S = \frac{\lim}{x \uparrow 9l}[\frac{5qlx^2}{2} - ql^2(x-l) - \frac{q}{6}(x-l)^3 - \frac{9ql}{2}(x-3l)^2 + \\ + \frac{q}{2}(x-3l)^3 - \frac{q}{72l}(x-3l)^4 - 19{,}83ql^3] \\ \hline EI_z v_S = \frac{\lim}{x \uparrow 9l}[\frac{5qlx^3}{6} - \frac{ql^2(x-l)^2}{2} - \frac{q(x-l)^4}{24} - \frac{3ql(x-3l)^3}{2} + \\ + \frac{q(x-3l)^4}{8} - \frac{q(x-3l)^5}{360l} - 19{,}83ql^3.x] \end{cases}$$

$$\begin{cases} EI_z\varphi_S = [\frac{5ql(9l)^2}{2} - ql^2(9l-l) - \frac{q}{6}(9l-l)^3 - \frac{9ql}{2}(9l-3l)^2 + \\ + \frac{q}{2}(9l-3l)^3 - \frac{q}{72l}(9l-3l)^4 - 19{,}83ql^3] \\ \hline EI_z v_S = [\frac{5ql(9l)^3}{6} - \frac{ql^2(9l-l)^2}{2} - \frac{q(9l-l)^4}{24} - \frac{3ql(9l-3l)^3}{2} + \frac{q(9l-3l)^4}{8} \\ -- \frac{q(9l-3l)^5}{360l} - 19{,}83ql^3.9l] \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_S = 42{,}77\frac{ql^4}{EI_z} \\ \hline \varphi_S = 17{,}34\frac{ql^3}{EI_z} \end{cases} ;$$

$$v_S = \frac{42{,}77.ql^4}{EI_z} = \frac{42{,}77\frac{6N}{m}(0{,}21)^4 m^4}{2{,}1.10^5\frac{N}{mm^2}\frac{6.8^3 mm^4}{12}} = \frac{42{,}77.6.(0.21)^4.10^9 mm^3}{2{,}1.10^5.256mm^2} = 9{,}28mm$$

$$\varphi_S = \frac{17{,}34.ql^3}{EI_z} = \frac{17{,}34.\frac{6N}{m}(0{,}21)^3 m^3}{2{,}1.10^5\frac{N}{mm^2}\frac{6.8^3 mm^4}{12}} = \frac{17{,}34.6.(0.21)^3.10^6 mm^2}{2{,}1.10^5.256mm^2} =$$

$$= 0{,}017892[rad].$$

6.14. Teoremele lui Castigliano

Dacă există o bară încărcată ca în figura 10:

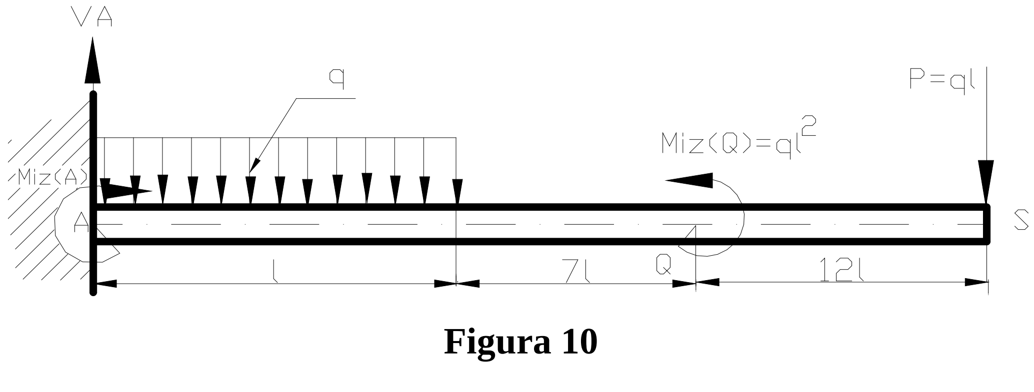


Figura 10

$\frac{\partial L}{\partial P} = v_S$; săgeata în punctul S , iar $\frac{\partial L}{\partial M_{izQ}} = \varphi_Q$;

rotirea secţiunii transversale din punctul Q .

$$v_S = \sum \int_l \frac{M_{iz}(x)}{EI_z} \frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial P} dx; \qquad \varphi_Q = \sum \int_l \frac{M_{iz}(x)}{EI_z} \frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial M_{izQ}} dx;$$

$L = \sum \int_l \frac{M_{iz}^2(x)}{2EI_z} dx$; L fiind lucrul mecanic elastic de deformaţie înmagazinat într-o bară supusă la încovoiere.

În cazul în care se cere să calculăm în (S) şi rotirea secţiunii transvesale, trebuie să introducem în S un moment încovoietor concentrat fictiv M_{iz} (S) = 0 kN.m , apoi se calculează V_A şi M_{iz} (A) funcţie de M_{iz}(S) , la sfârşitul rezolvării problemei se face M_{iz} (S) = 0 kN.m.

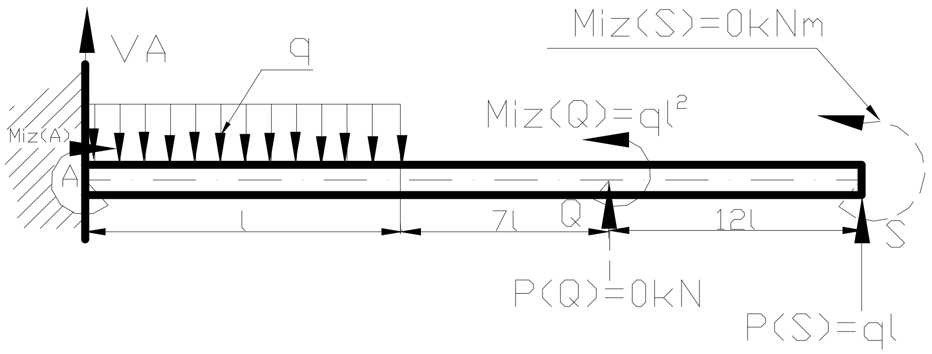


Figura 11

În mod analog dacă se cere săgeata în Q , se introduce în secţiunea transversală din punctul Q , se introduce o forţă concentrată fictivă P_Q = 0 [kN] şi se procedează în acelaşi mod , adică calculăm forţa de reacţiune V_A , respectiv momentul de reacţiune M_{iz}(A) şi în funcţie de P_Q , apoi la sfârşitul rezolvării problemei se înlocuieşte P_Q = 0 [kN] .

Problema nr. 6

Să se calculeze săgeata şi rotirea secţiunii transversale din Q, pentru bara din figura 12 , ştiind că : E = 2,1.10^5 N/mm^2 ; q = 1,5 N/m ; l = 0,32 m , secţiunea transversală fiind circulară cu diametrul 60 mm.

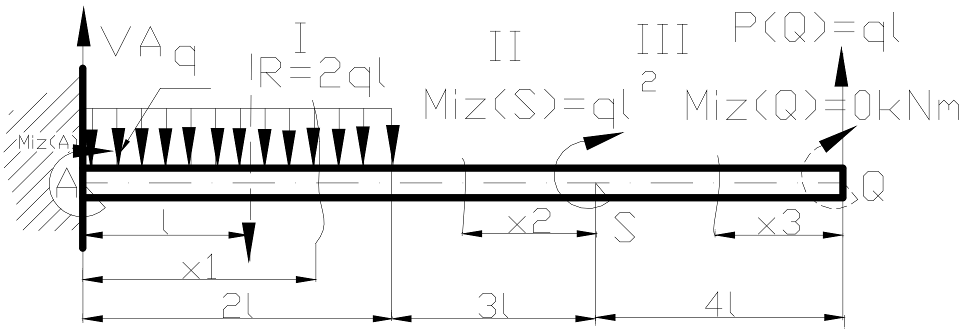


Figura 12

Deoarece în punctul Q nu avem moment încovoietor concentrat,
 se introduce un moment încovoietor concentrat fictiv
$M_{iz}(Q) = 0$ [kN.m] la urmă se introduce valoarea lui numerică .
Se calculează V_A şi M_{iz} (A) funcţie de M_{iz}(Q) şi de forţa concentrată P_Q cu menţiunea că la sfîrşitul rezolvării problemei se înlocuiesc M_{iz}(Q) = 0 [kN .m] şi P_Q = ql .

$\sum F_y = 0$; $V_A - 2ql + P_Q = 0$; $V_A = 2ql - P_Q$;

$$\sum M_{iz}(A) = 0; \qquad M_{iz}(A) + 2ql.l + ql^2 + M_{izQ} - P_Q.9l = 0;$$

$$M_{iz}(A) = -3ql^2 - M_{izQ} + P_Q.9l.$$

La aplicarea teoremelor lui Castigliano pentru început trebuie să se lucreze cu tabelele , fiind mai uşor de calculat, după o anumită perioadă de acomodare cu aceste metode atunci se poate trece peste anumite etape de calcul .

Regiunea întâi; $M_{iz}(x_1) = V_A.x_1 + M_{iz}(A) - \dfrac{qx_1^2}{2}$;

$$M_{iz}(x_1) = (2ql - P_Q)x_1 + 9lP_Q - M_{izQ} - 3ql^2 - \frac{qx_1^2}{2};$$

Observaţie

Pentru regiunea a II-a este bine să se ia originea în punctul S pentru că se uşurează calculul integralelor, de exemplu dacă avem :

cazul(I) ; $\int_a^b x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_a^b = \frac{(b^4 - a^4)}{4}$; cazul (II)

$\int_0^c x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^c = \frac{c^4}{4}$; în cazul al doilea este mai avantajos de calculat.

Regiunea	$M_{iz}(x)$	$\frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial P_Q}$	$\frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial M_{izQ}}$	$x \in (...)$
întâi	$(2ql - P_Q)x_1 + 9lP_Q - M_{izQ} - 3ql^2 - \frac{qx_1^2}{2}$	$-x_1 + 9l$	-1	(0;2l)
a II-a	$(4.l + x_2).P_Q - M_{izQ} - ql^2$	$4l + x_2$	-1	(0;3l)
a III-a	$P_Q.x_3 - M_{izQ}$	x_3	-1	(0;4l)

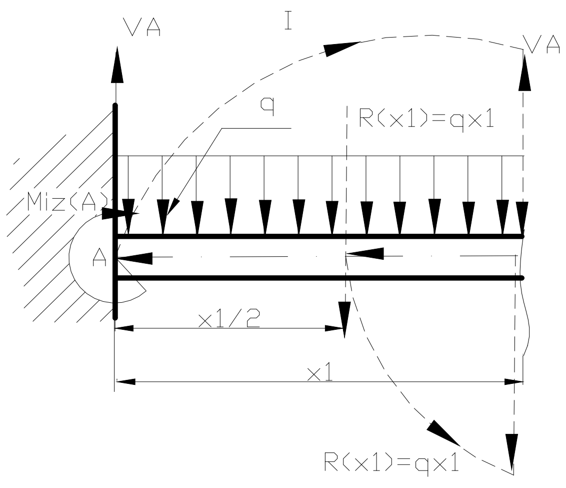


Figura 13

Regiunea a II-a

$x_2 \in (0;3l]$; $M_{iz}(x_2) = P_Q(4l + x_2) - M_{izQ} - ql^2$;

Regiunea a III-a

$x_3 \in (0;4l]$; $M_{iz}(x_3) = P_Q x_3 - M_{izQ}$; tabelul este indicat să se facă , deoarece ajută la calcul.

$$v_Q = \sum \int_l \frac{M_{iz}(x)}{EI_z} \frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial P_Q} dx = \frac{\partial L}{\partial P_Q};$$

$$\varphi_Q = \sum \int_l \frac{M_{iz}(x)}{EI_z} \frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial M_{izQ}} dx = \frac{\partial L}{\partial M_{izQ}}$$

$$\varphi_Q = \frac{1}{EI_z}\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2l}\left[(2ql - P_Q)x_1 + 9lP_Q - M_{izQ} - 3ql^2 - \frac{qx_1^2}{2}\right](-1)dx_1 + \\ + \int_0^{3l}\left[(4l + x_2)P_Q - M_{izQ} - ql^2\right](-1)dx_2 \end{array} \right\} +$$

$$+\frac{1}{EI_z}\left\{\int_0^{4l}(P_Q.x_3 - M_{izQ})(-1)dx_3\right\};$$

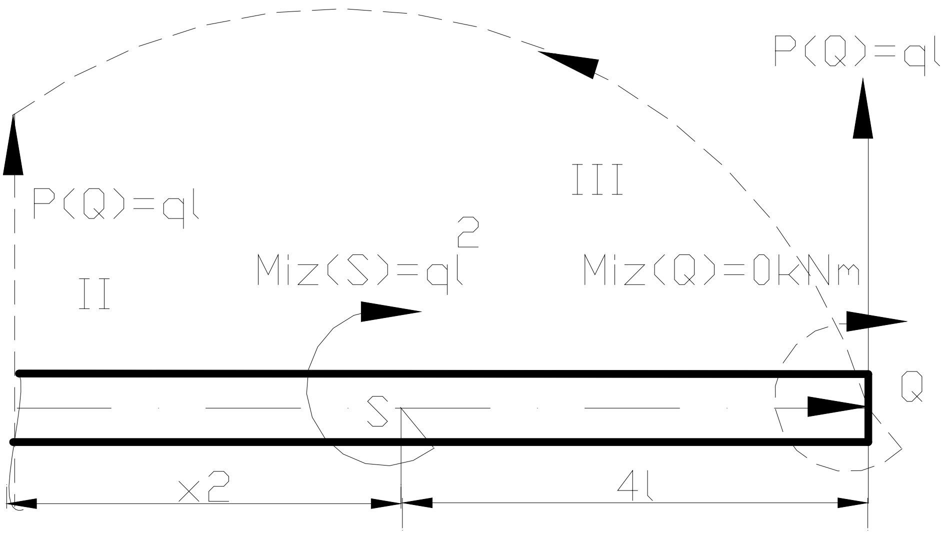


Figura 14

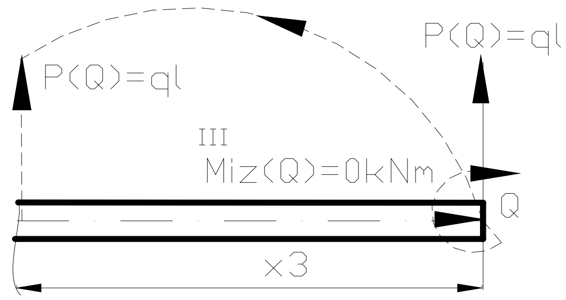


Figura 15

acum se fac înlocuirile cu valorile lor : $P_Q = ql$; $M_{izQ} = 0$ [kN.m]

$$\varphi_Q = \frac{1}{EI_z}\left\{\begin{aligned}&\int_0^{2l}\left[(2ql-ql)x_1+9lql-0-3ql^2-\frac{qx_1^2}{2}\right](-1)dx_1+\\&+\int_0^{3l}\left[(4l+x_2)ql-0-ql^2\right](-1)dx_2\end{aligned}\right\}+\frac{1}{EI_z}\left\{\int_0^{4l}(ql.x_3)(-1)dx_3\right\}$$

$$\varphi_Q = \frac{1}{EI_z}\left\{\int_0^{2l}\left[-qlx_1-6ql+\frac{qx_1^2}{2}\right]dx_1+\int_0^{3l}\left[-qlx_2-0-3ql^2\right]dx_2\right\}+$$

$$+\frac{1}{EI_z}\left\{\int_0^{4l}(ql.x_3)(-1)dx_3\right\}$$

$$\varphi_Q = \frac{1}{EI_z}\left\{\left[-\frac{qlx_1^2}{2}-6ql^2x_1+\frac{qx_1^3}{6}\right]\Bigg|_0^{2l}+\left[-3ql^2x_2-\frac{qlx_2^2}{2}\right]\Bigg|_0^{3l}-\frac{qlx_3^2}{2}\Bigg|_0^{4l}\right\}=-34{,}16\frac{ql^3}{EI_z}$$

$$v_Q = \sum\int_l \frac{M_{iz}(x)}{EI_z}\frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial P_Q}dx = \frac{\partial L}{\partial P_Q};$$

$$v_Q = \frac{1}{EI_z}\int_0^{2l}\left[(2ql-P_Q)x_1+9lP_Q-M_{izQ}-3ql^2-\frac{qx_1^2}{2}\right](9l-x_1)dx_1+$$

$$+\frac{1}{EI_z}\int_0^{3l}\left[(4l+x_2)P_Q-M_{izQ}-ql^2\right](x_2+4l)dx_2++\frac{1}{EI_z}\int_0^{4l}\left[P_Qx_3-M_{izQ}\right](x_3)dx_3$$

Acum se înlocuiesc P_Q şi M_{izQ} cu valorile lor şi anume : $P_Q = ql$; $M_{izQ} = 0$ [kN.m]

$$v_Q = \frac{1}{EI_z}\int_0^{2l}\left[(2ql - ql)x_1 + 9l.ql - 3ql^2 - \frac{qx_1^2}{2}\right](9l - x_1)dx_1 +$$

$$\frac{1}{EI_z}\int_0^{3l}\left[(4l + x_2)ql - ql^2\right](x_2 + 4l)dx_2 + \frac{1}{EI_z}\int_0^{4l}[qlx_3](x_3)dx_3$$

$$v_Q = \frac{1}{EI_z}\int_0^{2l}\left[qlx_1 + 6ql^2 - \frac{qx_1^2}{2}\right](9l - x_1)dx_1 +$$

;

$$\frac{1}{EI_z}\int_0^{3l}\left[3ql^2 + qlx_2\right](x_2 + 4l)dx_2 + \frac{1}{EI_z}\int_0^{4l}[qlx_3](x_3)dx_3$$

de unde $v_Q = \frac{201{,}16ql^4}{EI_z}$.După ce s-a făcut primul tabel se poate face şi un al doilea tabel cu valorile înlocuite pentru P_Q şi M_{izQ}:

$$\varphi_Q = \frac{-34{,}16.\frac{1{,}5N}{m}.(0{,}32m)^3}{2{,}1.10^5\frac{N}{mm^2}.63{,}585.10^4 mm^4} = \frac{-34{,}16.1{,}5.(0{,}32)^3.10^6}{2{,}1.10^5.63{,}585.10^4} =$$

$$= -0{,}12574.10^{-4}[rad];$$

Regiunea barei	$M_{iz}(x)$	$\frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial P_Q}$	$\frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial M_{izQ}}$	$x \in (...)$
întâi	$qlx_1 + 6ql^2 - \frac{qx_1^2}{2}$	$-x_1 + 9l$	-1	(0;2l)
a II-a	$3ql^2 + qlx_2$	$4l + x_2$	-1	(0;3l)
a III-a	qlx_3	x_3	-1	(0;4l)

$$v_Q = \frac{201{,}16.\frac{1{,}5N}{m}.(0{,}32m)^4}{2{,}1.10^5\frac{N}{mm^2}.63{,}585.10^4 mm^4} = \frac{201{,}16.1{,}5.(0{,}32)^4.10^9}{2{,}1.10^5.63{,}585.10^4} = 0{,}023695mm.$$

6.15. Metoda grafo-analitică de integrare a ecuaţiei diferenţiale de ordinul al II-lea a fibrei medii deformate

Fie bara din figura 16 , încărcată cu o sarcină distribuită oarecare, ecuaţia fibrei medii deformate este : $EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = -M_{iz}(x)$; prin integrare se va obţine, $EI_z \frac{dv}{dx} = -\int_0^x M_{iz}(x)dx + C$;

$\int_0^x M_{iz}(x)dx = A_{ox}$, reprezintă aria diagramei de momente încovoietoare pe porţiunea o-x care se notează cu A_{ox} . Implică relaţia, $EI_z \frac{dv}{dx} = -A_{ox} + C$; constanta C se calculează

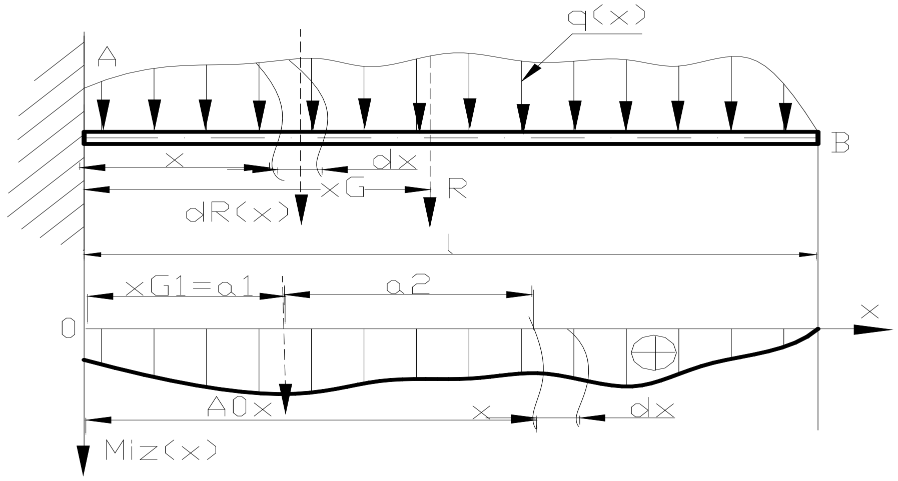


Figura 16

din condiţia iniţială a lui Cauchy,

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{dv}{dx} = tg\varphi_0 \approx \varphi_0 = \frac{1}{EI_z} \lim_{x \downarrow 0} [-A_{ox} + C] \;; \quad \varphi_0 = \frac{C}{EI_z};$$

$C = EI_z \varphi_0$; $A_{00} = 0$; $EI_z \frac{dv}{dx} = -A_{ox} + EI_z \varphi_0$; se integreză încă o dată şi vom obţine: $EI_z v(x) = EI_z \varphi_0 .x - \int_0^x A_{ox} dx + D$.

Acum se integrează prin părţi $\int_0^x A_{ox} dx$; f (x) = A_{ox} ; $\frac{df}{dx} = \frac{dA_{ox}}{dx}$; dg = dx ; $\int dg = \int dx$; g (x) = x ; formula de integrare prin părţi este: $\int f(x) g'(x) dx = f(x).g(x) - \int f'(x) g(x) dx$;

$\int_0^x A_{ox} dx = x.A_{ox} \Big|_0^x - \int_0^x x.dA_{ox}$; cum din figura 16 , reiese că

x = $a_1 + a_2$, iar $\int_0^x x.dA_{ox}$ reprezintă momentul static al suprafeţei diagramei de momente încovoietoare de pe porţiunea o-x faţă de origine, deci $\int_0^x x.dA_{ox} = a_1 A_{ox}$; unde x = $a_1 + a_2$

$$\int_0^x A_{ox} dx = x.A_{ox} \Big|_0^x - A_{ox}.a_1 = A_{ox}(a_1 + a_2 - a_1) = a_2.A_{ox} = S_{ox}.$$

$S_{ox} = a_2 A_{ox}$ reprezintă momentul static al suprafeţei diagramei de momente încovoietoare de pe porţiunea o-x faţă de secţiunea (x) . $EI_z v(x) = EI_z \varphi_0 x - S_{ox} + D$; constanta(D) se află din condiţia iniţială a lui Cauchy :

$$\lim_{x \downarrow 0} v(x) = v_0 = \lim_{x \downarrow 0} \left[\varphi_0 x - \frac{S_{ox}}{EI_z} + \frac{D}{EI_z} \right]; \quad v_0 = \frac{D}{EI_z};$$

D = v_0 . E I_z ; $EI_z v(x) = EI_z \varphi_0 x - S_{ox} + v_0 EI_z$.

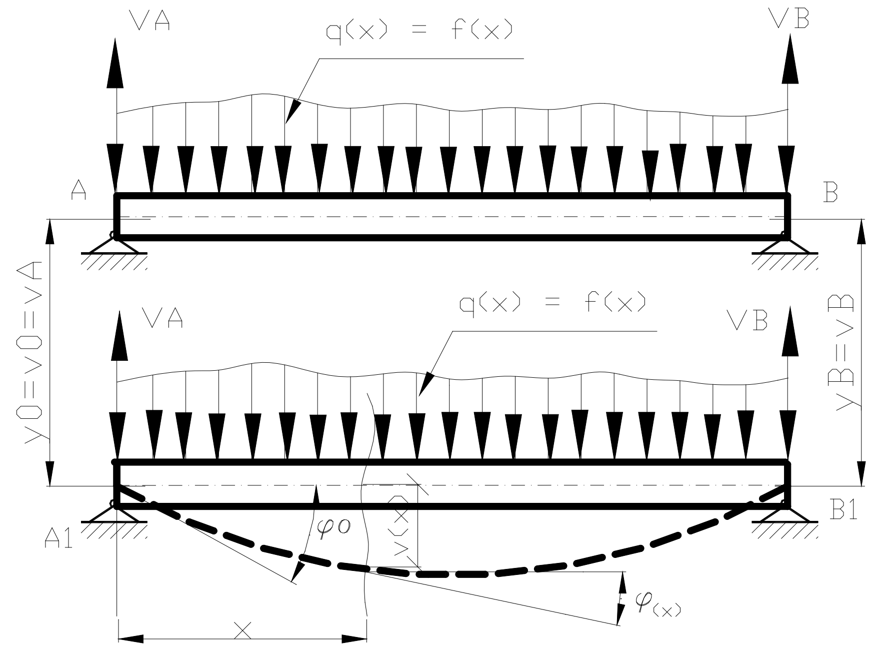


Figura 17

Această metodă este o combinaţie între metoda grafică şi cea analitică , dar pentru expresii mai dificile ale sarcinii distribuite de încărcare q(x) = f(x), devine mai greu de aplicat, metoda aceasta ajută la demonstrarea ecuaţiei celor trei momente (**ecuaţia lui Clapeyron**) , care este folosită la rezolvarea grinzilor continuie.

Problema nr. 7

Să se calculeze săgeata şi rotirea secţiunii transversale din punctul Q ,pentru bara din figura 20, ştiind că : E = 2,1 .10^5 N/mm^2; l = 0,43 m având secţiunea transversală circulară inelară cu d=40 mm şi D = 50 mm.

Rezolvare:

$$I_z = \frac{\pi}{64}\left(50^4 - 40^4\right) = 18{,}104063.10^4\, mm^4;$$

Aflăm forţele de reacţiune V_A şi V_B din condiţiile de echilibru:

$\sum F_y = 0$; V_A - 1 kN + V_B = 0 ; ecuaţia de verificare.

$\sum M_{iz}(A) = 0$; $1kN.0{,}1m - 3kN.m - V_B.1{,}6m = 0$;

$V_B = -\frac{2{,}9kN}{1{,}6} = -1{,}8125kN$; $\sum M_{iz}(B) = 0$

$-1kN.1{,}5m - 3kN.m + V_A.1{,}6m = 0$; $V_A = \frac{4{,}5kN}{1{,}6} = 2{,}8125kN$;

V_A - 1 kN + V_B = 0 ; ecuaţia de verificare, 2,8125 kN – 1 kN – 1,8125 kN = 0 ; 0 = 0 este îndeplinită ecuaţia de verificare , deci s-au calculat corect forţele de reacţiune .

Deoarece V_B = - 1,8125 kN , se schimbă sensul, acest lucru nu este obligatoriu.

Regiunea întâi

$x_1 \in [0;0{,}1m)$; $M_{iz}(x_1) = 2{,}8125kN.x_1$; $\lim\limits_{x_1 \downarrow 0} M_{iz}(x_1) = 0$;

$\lim\limits_{x_1 \uparrow 0{,}1m} M_{iz}(x_1) = 2{,}8125kN.0{,}1m = 0{,}28125kN.m$

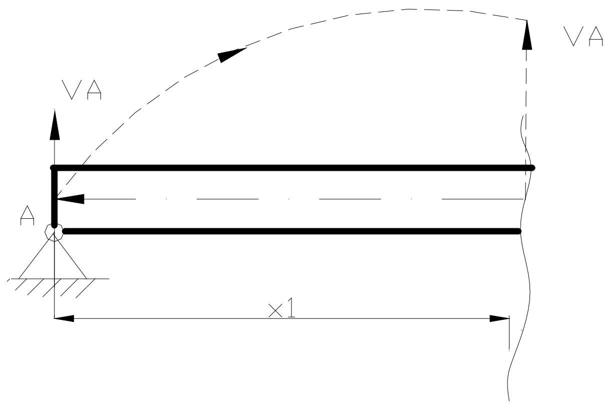


Figura 18

Regiunea a II-a

$x_2 \in [0{,}1m;0{,}7m)$; $M_{iz}(x_2) = 2{,}8125kN.x_2 - 1kN(x_2 - 0{,}1m)$;

$\lim\limits_{x_2 \downarrow 0{,}1m} M_{iz}(x_2) = 2{,}8125kN.0{,}1m = 0{,}28125kN.m$;

$$\lim_{x_2 \uparrow 0{,}7m} M_{iz}(x_2) = 2{,}8125kN.0{,}7m - 1kN.0{,}6m = 1{,}36875kN.m$$

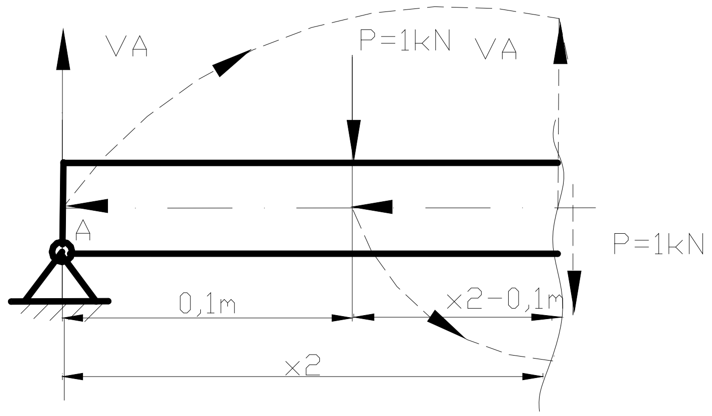


Figura 19

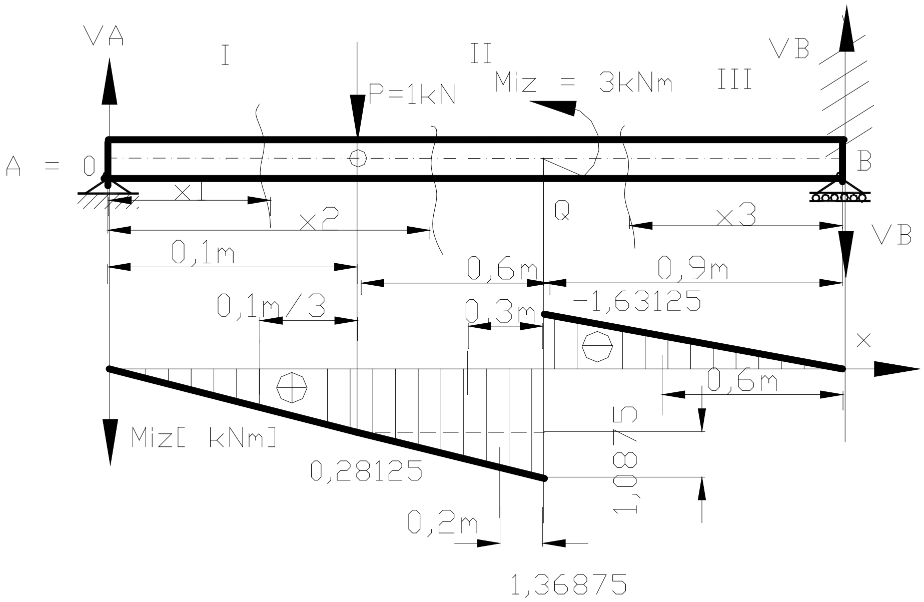


Figura 20

Regiunea a III-a

$x_3 \in (0;0{,}9m]$; $\qquad M_{iz}(x_3) = -1{,}8125kN.x_3$;

$$\lim_{x_3 \uparrow 0{,}9m} M_{iz}(x_3) = -1{,}8125kN.0{,}9m = -1{,}63125kN.m;$$

$\frac{\lim}{x_3 \downarrow 0} M_{iz}(x_3) = 0$.

Se ia ca origine unul din capetele barei A - O, această origine trebuie să rămână neschimbată pe tot timpul rezolvării problemei.

$EI_z \frac{dv}{dx} = EI_z \varphi_0 - A_{ox}$; $EI_z v(x) = EI_z \varphi_0 x - S_{0x} + v_0 EI_z$; dar $v_0 = 0$ în cazul nostru, $EI_z v(x) = EI_z \varphi_0 x - S_{ox}$; pentru a afla pe φ_0 (rotirea secţiunii transversale în origine) folosim a II-a condiţie de reazem, anume săgeata în B este egală cu zero ($v_B = 0$) .

$$\frac{\lim}{x \uparrow 1{,}6m} v(x) = v_B = 0 = \frac{1}{EI_z} \frac{\lim}{x \uparrow 1{,}6m} {}_z (EI_z \varphi_0 x - S_{ox}) =$$

$$= \varphi_0 . 1{,}6m - \frac{S_{OB}}{EI_z}$$

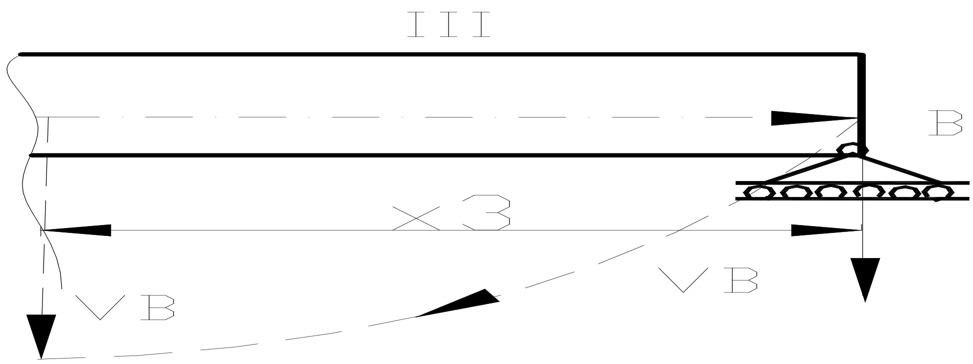


Figura 21

$$\varphi_0 = \frac{S_{OB}}{EI_z 1{,}6m}.$$

S-a desfăcut trapezul dreptunghic într-un triunghi şi un dreptunghi, conform principiului suprapunerii efectelor.

$$S_{OB}=\frac{0{,}28125kN.m.0{,}1m}{2}\left(\frac{0{,}1m}{3}+1{,}5m\right)+$$

$$+0{,}28125kN.m.0{,}6m(0{,}3m+0{,}9m)-\frac{1{,}63125kN.m.0{,}9m}{2}(0{,}6m)+$$

$$+\frac{1{,}0875kNm.0{,}6m}{2}(0{,}2m+0{,}9m)=142{,}5.10^{-3}kN.m^{3}=$$

$$=142{,}5.10^{9}N.mm^{3}$$

$$\varphi_{0}=\frac{S_{OB}}{1{,}6m.EI_{z}}=\frac{142{,}5.10^{9}N.mm^{3}}{2{,}1.10^{5}\frac{N}{mm^{2}}.18{,}104063.10^{4}mm^{4}.1{,}6.10^{3}mm}=.$$

$$=2{,}342608.10^{-3}[rad]$$

Pentru a afla săgeata şi rotirea secţiunii transversale din punctul Q , trebuie să ţinem cont de originea care se află în A= O.

$$\begin{cases}EI_{z}\dfrac{dv}{dx}=EI_{z}\varphi_{0}-A_{ox}\\ EI_{z}v(x)=EI_{z}\varphi_{0}x-S_{ox}\end{cases};\quad \text{pentru Q avem :}$$

$$\varphi_{Q}=\lim_{x\uparrow 0{,}7m}\left(\varphi_{0}-\frac{A_{ox}}{EI_{z}}\right)=\lim_{x\uparrow 0{,}7m}\frac{dv}{dx}=\lim_{x\uparrow 0{,}7m}\frac{EI_{z}\varphi_{0}-A_{ox}}{EI_{z}};$$

$$\varphi_{Q}=\varphi_{0}-\frac{A_{OQ}}{EI_{z}};$$

$$A_{OQ}=\frac{0{,}28125kN.m.0{,}1m}{2}+0{,}28125kN.m.0{,}6m+\frac{1{,}0875kN.m.0{,}6m}{2}=$$

$$=0{,}509063kN.m^{2}=0{,}509063.10^{9}N.mm^{2}$$

$$\varphi_{Q}=2{,}342608.10^{-3}[rad]-\frac{0{,}509063.10^{9}N.mm^{2}}{2{,}1.10^{5}\frac{N}{mm^{2}}18{,}104063.10^{4}mm^{4}}=;$$

$$=-0{,}01104[rad]$$

$$v_Q = \frac{\lim}{x \uparrow 0{,}7m}\frac{EI_z\varphi_0 x - S_{ox}}{EI_z} = \frac{\lim}{x \uparrow 0{,}7m}\left(\varphi_0 x - \frac{S_{ox}}{EI_z}\right) = $$
$$= \varphi_0 .0{,}7m - \frac{S_{OQ}}{EI_z};$$

$$S_{OQ} = \frac{0{,}28125kNm.0{,}1m}{2}\left(\frac{0{,}1m}{3} + 0{,}6m\right) + 0{,}28125kNm.0{,}6m.0{,}3m +$$
$$+\frac{1{,}0875kNm.0{,}6m}{2}0{,}2m = 0{,}124781kNm^3;$$

$$S_{OQ} = 0{,}124781.10^{12}\ N.mm^3;$$

$$v_Q = 2{,}342608.10^{-3}[rad].0{,}7.10^3 mm -$$
$$-\frac{0{,}124781.10^{12} N.mm^3}{2{,}1.10^5 \frac{N}{mm^2}.18{,}104063.10^4 mm^4} = -1{,}64217mm.$$

Problema nr.8

Să se calculeze săgeata şi rotirea secţiunii transversale din punctul Q , pentru bara din figura 22 , ştiind că :
E = $2{,}1.10^5$ N/mm^2 ; P = 2 kN ; l = 0,63 m cu secţiunea transversală din figura 23.

Rezolvare:

Aflăm forţele de raecţiune V_A şi V_B din condiţiile de echilibru:

$\sum F_y = 0$; $V_A + V_B = P$; ecuaţia de verificare.

$\sum M_{iz}(A) = 0$; $P.l - V_B .4l = 0$; $V_B = \frac{P}{4}$.

$\sum M_{iz}(B) = 0$; $-3l. P. + V_A .4l = 0$; $V_A = \frac{3P}{4}$; ;

$V_A + V_B = P$; ecuaţia de verificare ; $\frac{3P}{4} + \frac{P}{4} = P$; P = P , este îndeplinită ecuaţia de verificare, deci s-au calculat corect forţele de reacţiune .

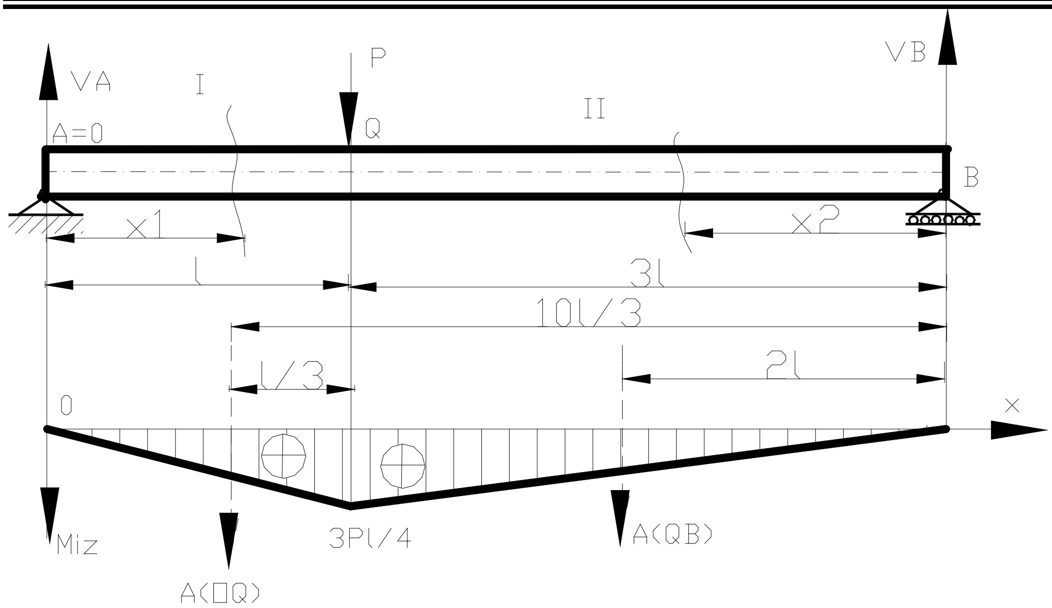


Figura 22

Se calculează mai întâi caracteristicile secţiunii transversale, apoi se calculează şi celelalte date ale problemei.

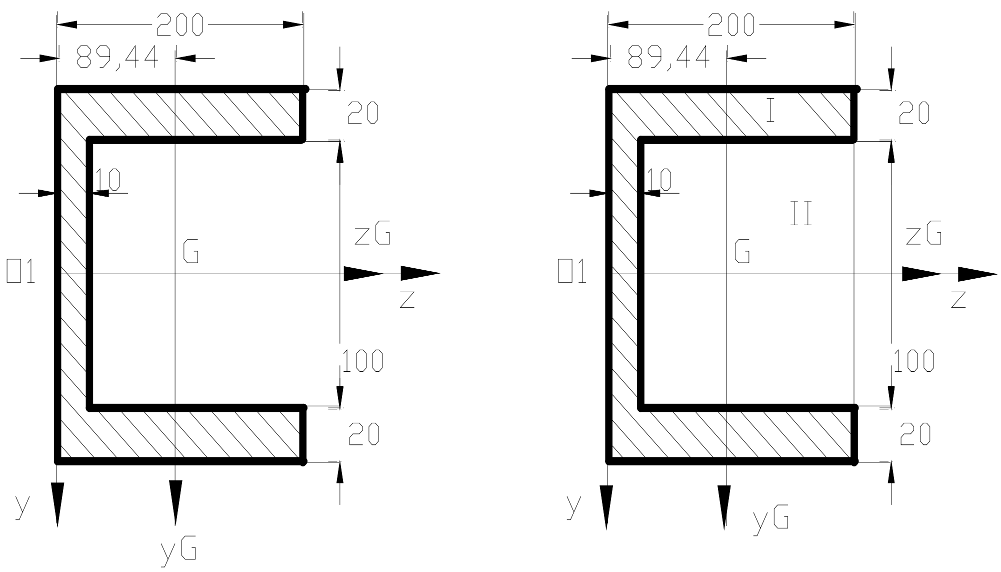


Figura 23

$$I_z = I_z^{I} - I_z^{II}; \qquad I_z^{I} = \frac{200.140^3}{12}; \qquad I_z^{II} = \frac{190.100^3}{12};$$

$$I_z = I_z^{I} - I_z^{II} = \frac{200.140^3}{12} - \frac{190.100^3}{12};$$

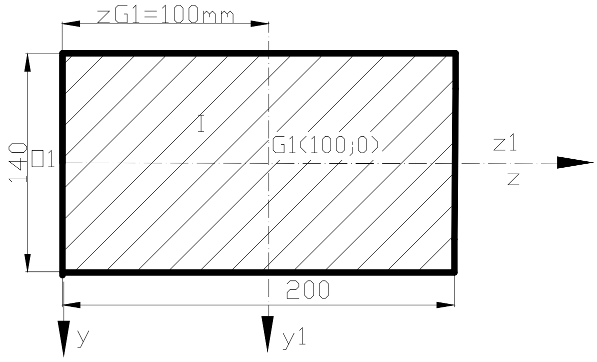


Figura 24

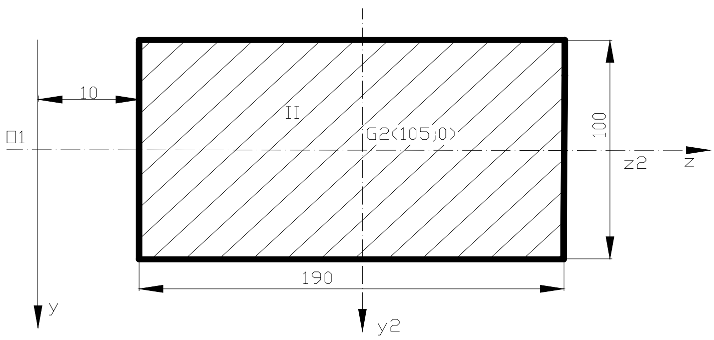


Figura 25

$I_z = 29{,}9 \cdot 10^6\ mm^4$;

$$z_G = \frac{z_1 A_1 - z_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{100mm.28.10^3 mm^2 - 195mm.19000mm^2}{28000mm^2 - 19000mm^2} = ;$$

$= 89{,}44mm$

cu $z_1 = 100mm$; $A_1 = 140.200mm^2$;
$A_1 = 28000\ mm^2$; $z_2 = 105\ mm$; $A_2 = 190.100\ mm^2 = 19000\ mm^2$; pentru calculul săgeţilor şi a rotirilor, vom aplica metoda grafo-analitică.

$$\begin{cases} EI_z \dfrac{dv}{dx} = EI_z\varphi_0 - A_{ox} \\ \hline EI_z v(x) = EI_z\varphi_0 x + v_0 EI_z - S_{ox} \end{cases}$$; dar cum săgeata în articulaţia A este egală cu zero , $v_0 = 0$,

$$\begin{cases} EI_z \dfrac{dv}{dx} = EI_z\varphi_0 - A_{ox} \\ \hline EI_z v(x) = EI_z\varphi_0 x - S_{ox} \end{cases}$$; şi φ_0 (rotirea din origine) se află cu ajutorul celei de a II-a condiţie de reazem.

$$\frac{\lim}{x\uparrow 4l} v(x) = v_B = 0 = \frac{1}{EI_z}\frac{\lim}{x\uparrow 1{,}6m_z}(EI_z\varphi_0 x - S_{ox}) = = \varphi_0 .4l - \frac{S_{OB}}{EI_z} = 0 \quad ; \quad \varphi_0 = \frac{S_{OB}}{4lEI_z} ;$$

$$S_{OB} = \frac{10l}{3}A_{OQ} + 2l.A_{QB} = \frac{10l}{3}\frac{3Pl^2}{8} + 2l.\frac{9Pl^2}{8} = 3{,}5Pl^3;$$ să calculăm şi cu ajutorul calculului integral .

Regiunea întâi

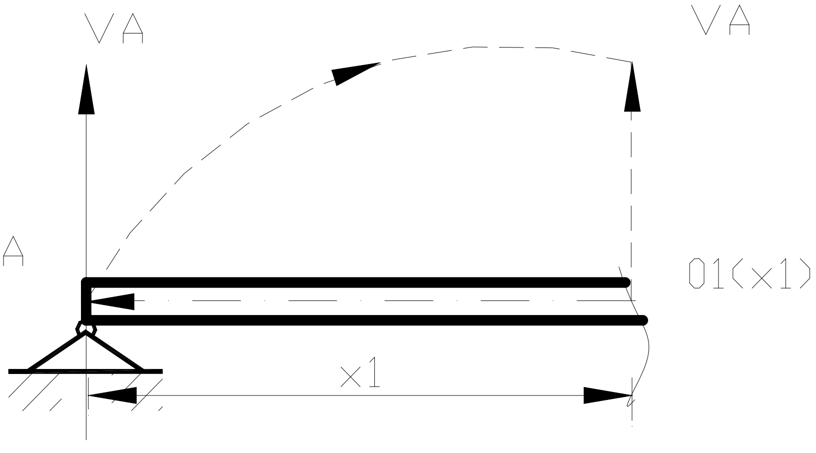


Figura 26

$x_1 \in (0; l)$; $M_{iz}(x_1) = V_A x_1 = \dfrac{3P}{4}x_1;$

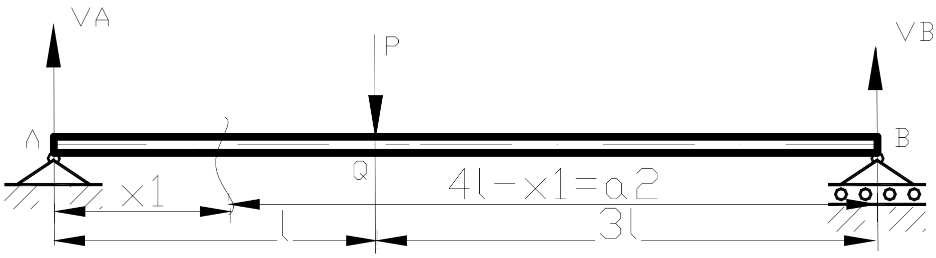


Figura 27

Regiunea a-II-a $x_2 \in (0;3l)$; $M_{iz}(x_2) = V_B x_2 = \frac{P}{4} x_2$;

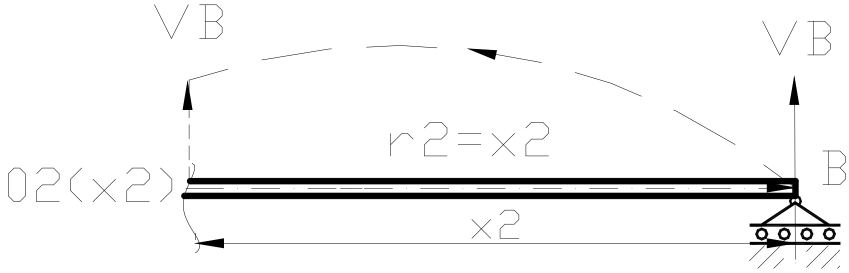


Figura 28

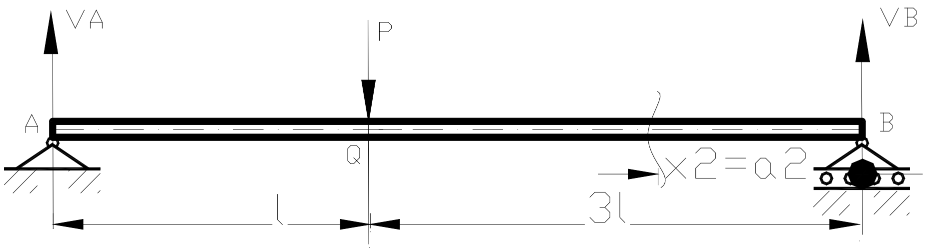


Figura 29

$$S_{OB} = \int_0^l (4l - x_1) M_{iz}(x_1) dx_1 + \int_0^{3l} x_2 M_{iz}(x_2) dx_2 == \int_0^l (4l - x_1) \frac{3Px_1}{4} dx_1 +$$

$$+ \int_0^{3l} x_2 \frac{Px_2}{4} dx_2$$

$$S_{OB} = 3{,}5Pl^3$$

$$\varphi_0 = \frac{S_{OB}}{4lEI_z} = \frac{3{,}5Pl^3}{4lEI_z} = \frac{3{,}5.2kN.(0{,}6m)^2}{4.2{,}1.10^5 \frac{N}{mm^2} 29{,}9.10^6 mm^4} =$$

$$= \frac{3{,}5.2.10^3 N.(0{,}6)^2 10^6 mm^2}{4.2{,}1.10^5 \frac{N}{mm^2} 29{,}9.10^6 mm^4};$$

$\varphi_0 = 0{,}010033.10^{-2}$ [rad] .

Săgeata şi rotirea în Q :

$$\varphi_Q = \lim_{x \uparrow l}\left(\varphi_0 - \frac{A_{ox}}{EI_z}\right) = \lim_{x \uparrow l}\frac{dv}{dx} = \lim_{x \uparrow l}\frac{EI_z\varphi_0 - A_{ox}}{EI_z};$$

$$\varphi_Q = \varphi_0 - \frac{A_{OQ}}{EI_z};$$

$$\varphi_Q = 0{,}010033.10^{-2}[rad] - \frac{A_{OQ}}{EI_z};$$

$$A_{OQ} = \frac{3Pl^2}{8} = \frac{3.2kN.(0{,}63m)^2}{8} = \frac{3.10^3 N(0{,}63)^2 10^6 mm^2}{4} =$$

$$= 0{,}297675.10^9 Nmm^2$$

$$\varphi_Q = 0{,}010033.10^{-2}[rad] - \frac{0{,}297675.10^9 Nmm^2}{2{,}1.10^5 \frac{N}{mm^2} 29{,}9.10^6 mm^4} =$$

$$= 0{,}005292.10^{-2}[rad]$$

Săgeata din punctul Q :

$$v_Q = \lim_{x \uparrow l}\frac{EI_z\varphi_0 x - S_{ox}}{EI_z} = \lim_{x \uparrow l}\left(\varphi_0 x - \frac{S_{ox}}{EI_z}\right) = \varphi_0 .l - \frac{S_{OQ}}{EI_z};$$

$$S_{OQ} = A_{OQ}\frac{l}{3} = \frac{3Pl^2}{8}\frac{l}{3} = \frac{Pl^3}{8};$$

sau calculăm cu integrala:

$$S_{OQ} = \int_0^l (l - x_1)M_{iz}(x_1)dx_1 = \int_0^l (l - x_1)\frac{3Px_1}{4}dx_1 = \frac{Pl^3}{8};$$

$$S_{OQ} = \frac{2kN.(0,63m)^3}{8} = \frac{10^3 N(0,63)^3 10^9 mm^3}{4} = 0,062512.10^{12} Nmm^3$$

$$v_Q = 0,010033.10^{-2}[rad]0,63.10^3 mm - \frac{0,62512.10^{12} N.mm^3}{2,1.10^5 \frac{N}{mm^2} 29,9.10^6 mm^4} =$$

$$= 0,053252mm$$

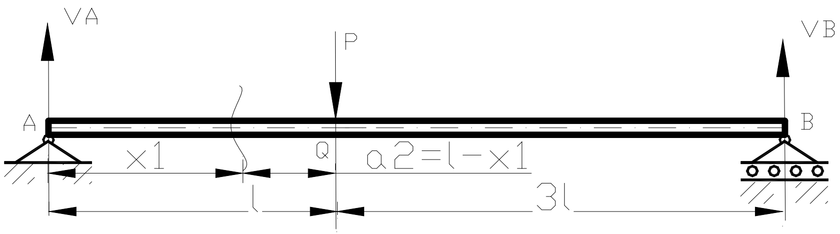


Figura 30

6.16. Studiul deplasărilor prin metode energetice

<u>Lucrul mecanic al forţelor exterioare</u>

6.16.1. Bara supusă la întindere sau compresiune

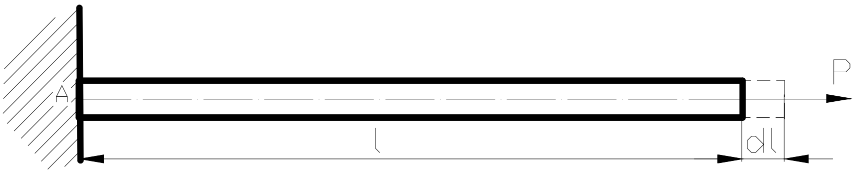


Figura 31

Barei din figura 31 se aplică o forţă de întindere , a cărei valoare creşte progresiv de la zero la P .

$$\delta = \Delta l = \frac{Pl}{EA} = kP$$

Lucrul mecanic elementar al unei forţe $\vec{P}$, corespunzător deplasării $d\vec{l}$ a punctului de aplicaţie este conform definiţiei din mecanică:

dL= $\vec{P}\,.\,\vec{dl}$ = P . dl . cos α , unde unghiul α fiind unghiul între direcţia forţei şi cea a deplasării.

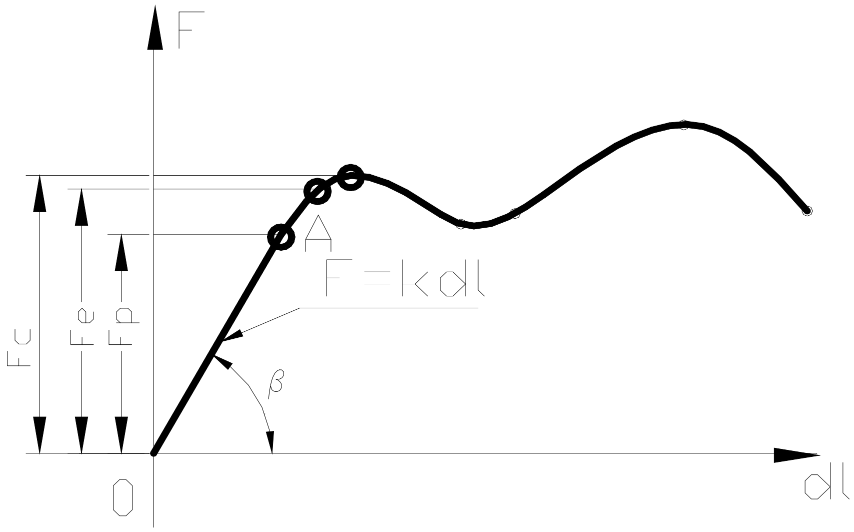


Figura 32

În cazul nostru , bara fiind solicitată la întindere , α = 0 ;
cos α = cos 0 = 1 ; şi dl = dδ , iar lucrul mecanic elementar
dL = P . dδ = P k dP ; dL = k P dP ;

$\int dL = \int kPdP = k\int PdP = k\,\dfrac{P^2}{2} = kP.\dfrac{P}{2} = \dfrac{\delta P}{2}$; această relaţie se poate face şi pentru alte solicitări simple.

6.16.2. Bara supusă la încovoiere pură

Din figura 33 , rezultă : $x \in (0, l)$; $M_{iz}(x) = -M_0$;

Lucrul mecanic de deformaţie înmagazinat în această bară va fi :

$L = \sum \int \dfrac{M_{iz}^2(x)}{2EI_z}dx$; $M_{iz}(x) = -M_0$ = constant ;

$$L=\sum\int\frac{M_{iz}^{2}(x)}{2EI_z}dx=\int_0^l\frac{(-M_0)^2}{2EI_z}dx=\frac{M_0^2}{2EI_z}x\Big|_0^l=\frac{M_0^2 l}{2EI_z}$$

Dar unghiulul în capătul liber al barei este: $\varphi=\frac{\partial L}{\partial M_0}=\frac{2M_0 l}{2EI_z}=\frac{M_0 l}{EI_z}$;

deci lucrul mecanic al cuplului exterior M_0, fiind $L=\frac{M_0\varphi}{2}$.

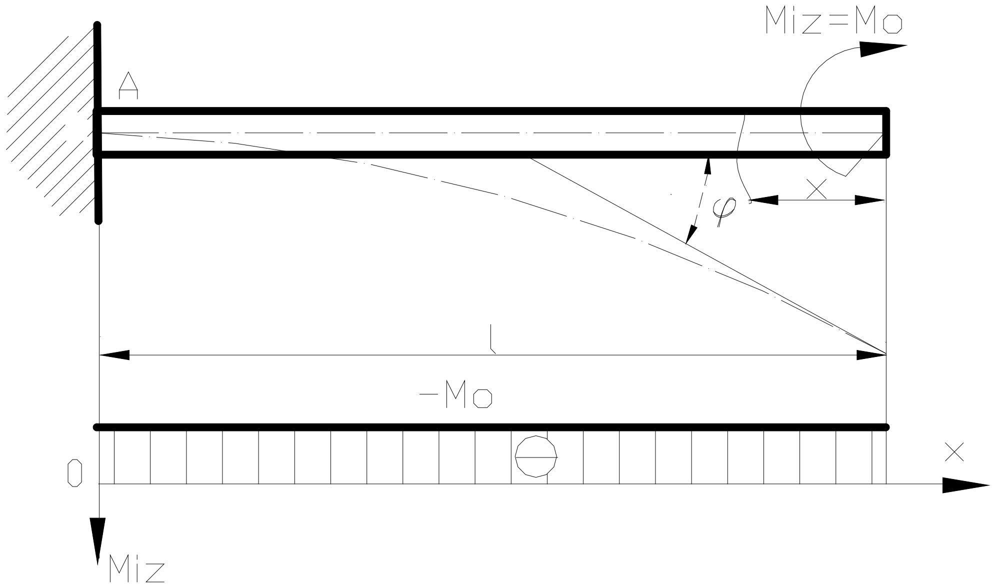


Figura 33

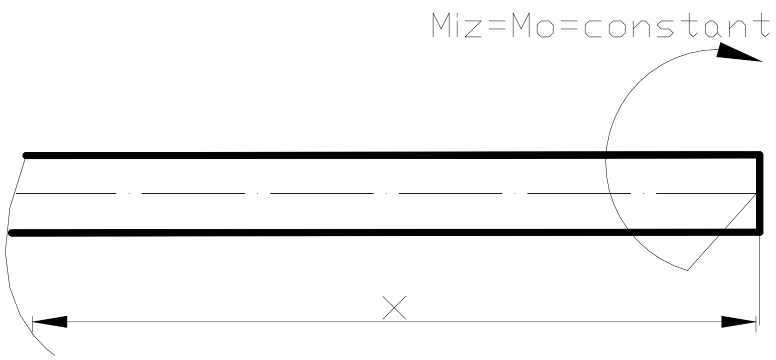


Figura 34

6.16.3. Bara supusă la solicitarea de încovoiere simplă

$x \in (0, l);\qquad M_{iz}(x) = -Px;\qquad \lim_{x \downarrow 0} M_{iz}(x) = \lim_{x \downarrow 0} (-Px) = 0;$

$\lim_{x \uparrow l} M_{iz}(x) = \lim_{x \uparrow l} (-Px) = -Pl;$

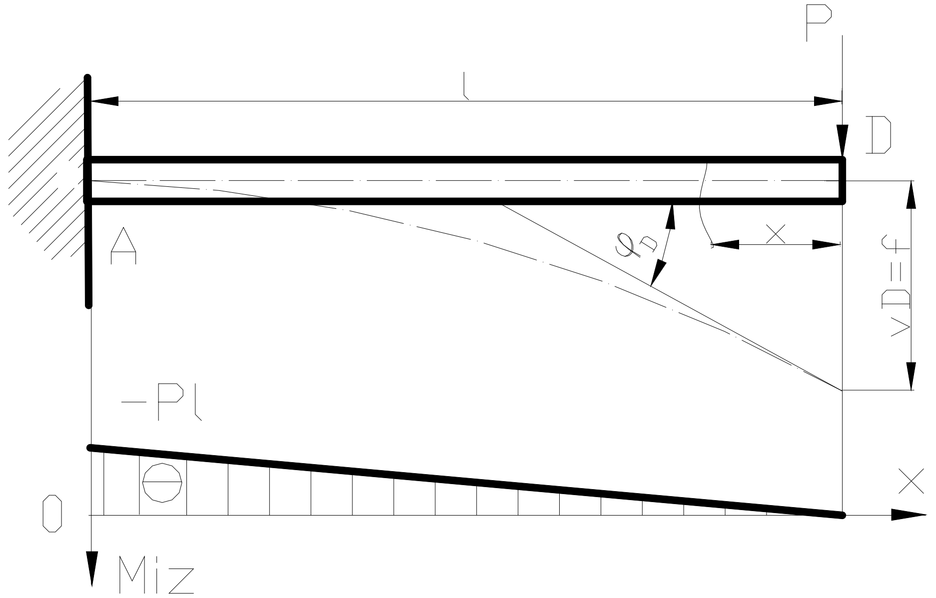


Figura 35

$$L = \sum \int \frac{M_{iz}^2(x)}{2EI_z} dx = \int_0^l \frac{(-Px)^2}{2EI_z} dx = \frac{P^2}{2EI_z} \frac{x^3}{3}\Big|_0^l = \frac{P^2 l^3}{6EI_z};$$

$$v_D = f_D = \frac{\partial L}{\partial P} = \frac{2Pl^3}{6EI_z} = \frac{Pl^3}{3EI_z};\; L = \frac{P.v_D}{2} = \frac{Pf}{2};\; f = f_D .$$

6.16.4. Bara supusă la solicitarea de răsucire a unui arbore

$x \in (0, l);\qquad M_t(x) = M_{t0};$

$$L = \sum \int \frac{M_t^2(x)}{2GI_p} dx = \int_0^l \frac{M^2{}_t(x)}{2GI_p} dx = \int_0^l \frac{M_{t0}^2}{2GI_p} dx = \frac{M^2{}_{t0}}{2GI_p} x\Big|_0^l = \frac{M_{t0}^2 l}{2GI_p};$$

$\Delta\varphi_B = \frac{\partial L}{\partial M_{t0}} = \frac{2M_{t0}l}{2GI_p} = \frac{M_{t0}.l}{GI_p}$; $\quad L = \frac{M_{t0}\Delta\varphi_B}{2}$. În toate cazurile în care relaţia între forţă sau cuplul exterior şi deformaţia corespunzătoare este liniară , iar aplicarea sarcinii se face static, lucrul mecanic al forţelor exterioare este egal cu energia de deformaţie

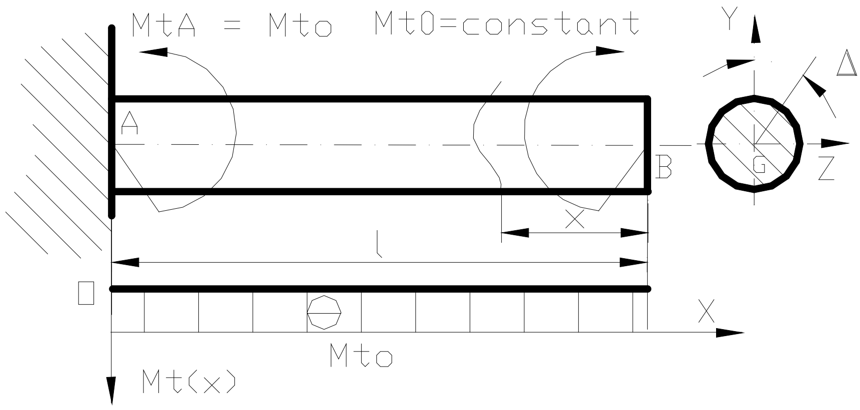


Figura 36

acumulată având o expresie dată de formulele arătate mai sus. Aceste expresii pe grafic reprezintă aria triunghiului OAB .

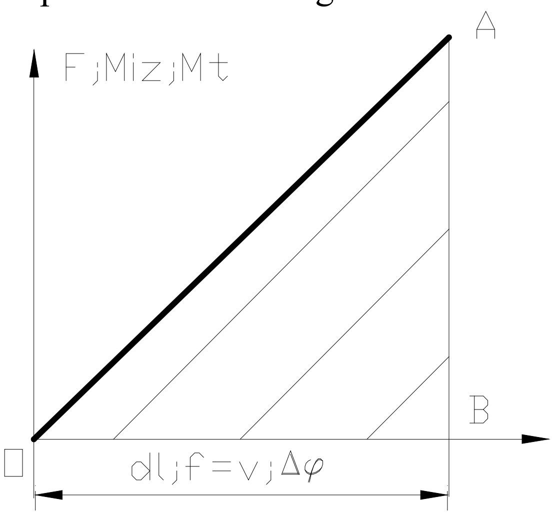


Figura 37

6.17.Teoremele reciprocităţii lucrului mecanic şi a deplasărilor.

Teorema lui Betti

Asupra unui corp oarecare se aplică două stări succesive de solicitare, produse de două grupe succesive de sarcini, aplicând asupra corpului prima stare de solicitare , punctele de aplicaţie ale forţelor suferă deplasări, deci forţele produc lucrul mecanic, iar corpul acumulează energia L_{11} .

Primul indice (1) indică faptul că lucrul mecanic este produs de forţele din prima stare de solicitare, al doilea indice (1) indică deplasările din prima stare.

Apoi pe corpul deformat se aplică o a doua grupă de forţe , deci o a doua stare de solicitare , care cauzează o a doua grupă de deplasări, în acest moment, forţele din a doua stare produse , corespunzător deplasărilor produse de ele , lucrul mecanic L_{22} .

În acelaşi timp însă , forţele din prima stare , care se aflau aplicate pe corp, produc , datorită deplasărilor , produse din a doua stare, lucrul mecanic L_{12} , în final energia acumulată de corp , egală cu lucrul mecanic al forţelor exterioare, este $L_{11} + L_{22} + L_{12}$.

Schimbând ordinea de aplicare a sarcinilor , deci începând cu a doua şi aplicând acelaşi raţionament, rezultă lucrul mecanic total
$L_{22} + L_{11} + L_{21}$, unde L_{21} este lucrul mecanic datorită forţelor din a doua stare şi deplasările produse de prima , în fond energia totală fiind aceeaşi deci : $L_{11} + L_{22} + L_{12} = L_{22} + L_{11} + L_{21}$.

Implică $L_{12} = L_{21}$; aceasta fiind teorema reciprocităţii lucrului mecanic sau **teorema lui Betti** care este : dacă asupra unui corp deformabil se aplică două stări de încărcare succesive, lucrul mecanic efectuat de forţele (şi cuplurile) din prima stare cu deplasările (săgeţi şi unghiuri) din a doua este egal cu lucrul mecanic efectuat din a doua stare cu deplasările din prima stare de încărcare.

Problema nr.9

Să se calculeze săgeata din punctul D , pentru bara din figura 38 a) , ştiind că : $E = 2{,}1.10^5$ N/mm^2 ; F = 4 kN ; l = 0,73 m , secţiunea transversală fiind circulară cu diametru d = 60 mm.

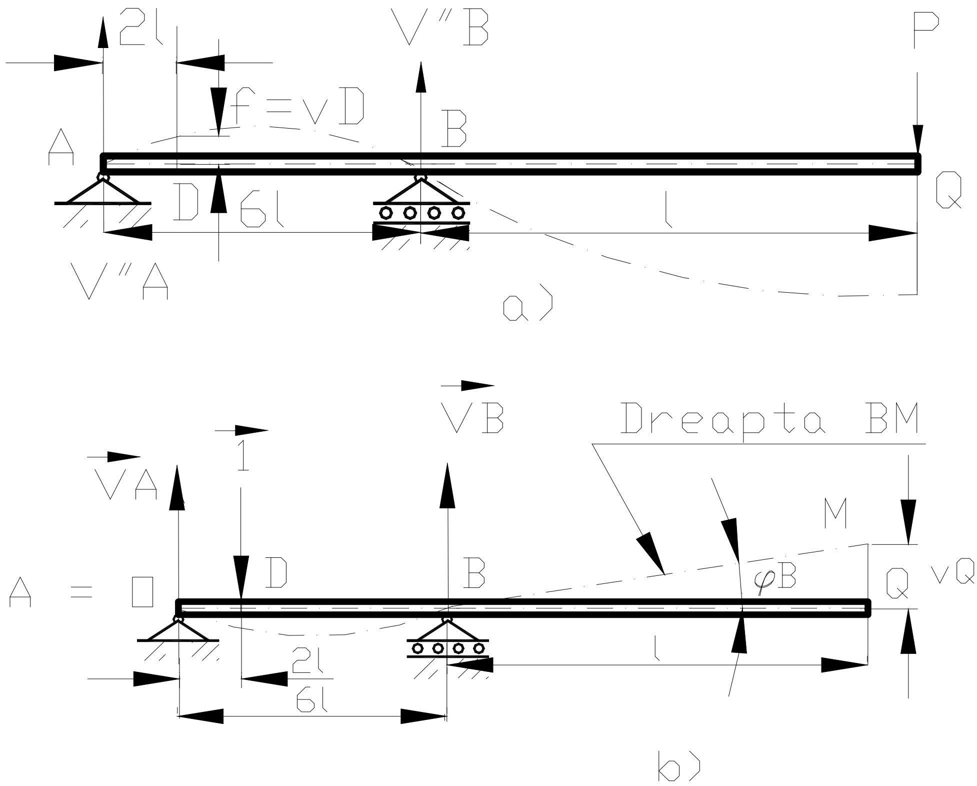


Figura 38

$I_z = \dfrac{\pi.60^4}{64} = 635850 mm^4$; prima stare de încărcare , se ia încărcarea reală a barei , iar drept a doua stare se aplică o forţă egală cu unitatea (forţa versor a forţei P) în secţiunea unde urmează a se afla săgeata [figura 38 cazul b)] . Deci bara este supusă succesiv la forţele $\left(\vec{P}; \vec{1} = \dfrac{\vec{P}}{|\vec{P}|} = \vec{u}_{\vec{P}} \right)$, $\vec{1}$ este forţa versor (unitate) şi se aplică în secţiunea transversală D. Lucrul mecanic al forţelor din prima stare de încărcare , adică a forţei P , cu deplasarea corespunzătoare de la a doua stare este L_{12} = - Pv ;

v = v_Q (s-a luat cu minus pentru că v este în sens invers cu forţa P) .

Analog , forţa versor (unitară) de la a doua stare cu deplasarea din dreptul ei de la prima stare dă $L_{21} = -1.f$ (semnul minus pentru că forţa unitară s-a luat de sens contrar săgeţii f) deci : $L_{12} = L_{21}$; $-Pv = -1.f$; rezultă că $Pv = 1.f$, [Pv] = [1.f] ; [P] [v] = [1].[f] ; [kN] . [m] = [kN] . [m] (forţa unitate poate fi : 1 kN ; 1 N ; etc.) .
Pentru bara din figura 38 cazul b) :
$\sum F_y = 0$; $V_A + V_B = 1$; ecauţia de verificare.

$\sum M_{iz}(A) = 0$; $1.2l - V_B.\, 6l = 0$; $V_B = \frac{1}{3}$; $\sum M_{iz}(B) = 0$;

$-1.4l + V_A.\, 6l = 0$; $V_A = \frac{2}{3}$.

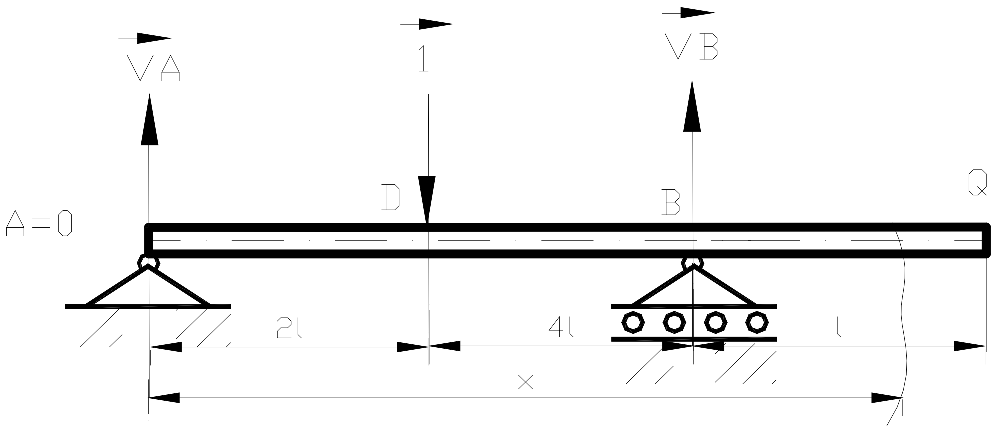


Figura 39

$V_A + V_B = 1$; ecauţia de verificare, $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$; este îndeplinită ecauţia de verificare.
Aplicăm procedeul Clebsch, pentru calculul săgeţilor şi a rotirilor, în cazul nostru trebuie să determinăm rotirea în punctul A (rotirea în origine) , am luat ca origine capătul A (A = O şi această origine rămâne neschimbată pe tot timpul rezolvării problemei).

$M_{iz}(x) = \frac{2x}{3} - 1(x - 2l) + \frac{1}{3}(x - 6l)$; este expresia momentului generalizator din ultima regiune, $EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = -M_{iz}(x)$;

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{2x}{3} + 1(x-2l) - \frac{1}{3}(x-6l)$$

$$\begin{cases} EI_z \dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{(x-2l)^2}{2} - \dfrac{(x-6l)^2}{6} + C \\ EI_z v(x) = -\dfrac{x^3}{9} + \dfrac{(x-2l)^3}{6} - \dfrac{(x-6l)^3}{18} + Cx + D \end{cases}$$

$$\frac{\lim}{x \uparrow 0} v(x) = v_A = 0 = \frac{\lim}{x \uparrow 0} \frac{\left(-\dfrac{x^3}{9} + Cx + D\right)}{EI_z} = \frac{D}{EI_z}$$

deci, D = 0 . Aflăm pe C din a doua condiţie de reazem:

$$\frac{\lim}{x \uparrow 6l} v(x) = v_B = 0 = \frac{\lim}{x \uparrow 6l} \frac{\left(-\dfrac{x^3}{9} + \dfrac{(x-2l)^3}{6} + Cx\right)}{EI_z} =$$

; rezultă că ,

$$= \frac{\left(-\dfrac{(6l)^3}{9} + \dfrac{(4l)^3}{6} + C.6l\right)}{EI_z}$$

C = 2,22 l^2 ; $EI_z \dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{(x-2l)^2}{2} - \dfrac{(x-6l)^2}{6} + 2{,}22.l^2$

$$\varphi_B = \frac{\lim}{x \uparrow 6l} \frac{dv}{dx} = \frac{\lim}{x \uparrow 6l} [-\frac{x^2}{3} + \frac{(x-2l)^2}{2} - \frac{(x-6l)^2}{6} + 2{,}22.l^2] \frac{1}{EI_z} \;\; ;$$

$$\varphi_B = -\frac{1{,}78 l^2}{EI_z}.$$

Din figura 39 porţiunea BQ nu este solicitată deci M_{iz} (x) = 0 , aplicăm ecuaţia fibrei medii deformate pe această regiune şi se obţine:

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = 0 \; ; \quad EI_z \frac{d\ v}{dx} = C_{BQ} \; ; \quad EI_z v(x) = xC_{BQ} + D_{BQ} \; ;$$

$y(x) = v(x) = \dfrac{1}{EI_z}(xC_{BQ} + D_{BQ})$ este ecuţia dreptei BM (ecuaţia fibrei medii deformate) .

În triunghiul BQM din figura 38 cazul b) aplicăm funcţiile trigonometrice :

$$tg\varphi_B = \frac{v_Q}{l} \approx \varphi_B; \qquad v_Q = l.\varphi_B = -\frac{1{,}78 l^3}{EI_z};$$

săgeata în D , fiind $f_D = f$; $1.f = P.v_Q = P.v$;

$$f = \frac{-1{,}78Pl^3}{EI_z} = -\frac{1{,}78.4.kN.(0{,}73m)^3}{2{,}1.10^5 \frac{N}{mm^2}.635850mm^4};$$

$$f = \frac{-1{,}78Pl^3}{EI_z} = -\frac{1{,}78.4.kN.(0{,}73m)^3}{2{,}1.10^5 \frac{N}{mm^2}.635850mm^4} = -\frac{1{,}78.4.10^3 N.(0{,}73)^3 10^9 mm^3}{2{,}1.10^5 \frac{N}{mm^2}.635850mm^4} =$$

$$= -2.10^{-2} mm$$

6.18. Studiul deplasărilor prin metoda Mohr- Maxwell Metoda de integrare a lui Vereşceaghin

Fie o bară asupra căreia acţionează forţele: $\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3$, fiind prima stare de încărcare (cea reală) şi în al doilea caz asupra ei acţionează o forţă egală cu unitatea (forţa versor din punctul E) , forţa unitate ($\vec{1}$) se pune cu punctul de aplicaţie în secţiunea în care vrem să calculăm deplasarea liniară . Dacă luăm un element infinitezimal din bară (dx) , în prima stare forţa axială N(x) , iar în a doua stare o forţă axială n , care în cazul de faţă este egală cu unu , adică $\vec{n} = \vec{1}$, forţa versor (se neglijează greutatea proprie a barei) dar în cazul general are o valoare oarecare $\vec{n}$. Explicităm lucrul mecanic dL_{12} pentru

elementul infinitezimal din bară (dx), unde dL_{12} se datoreşte forţei N (x) de la prima stare de încărcare şi deplasării produse de forţa (n) de la a doua stare, care se poate scrie: $\Delta(dx) = \frac{n.dx}{EA}$;

$dL_{12} = N(x) * \Delta(dx) = \frac{N.n}{EA} dx$; se integrează expresia şi se obţine,

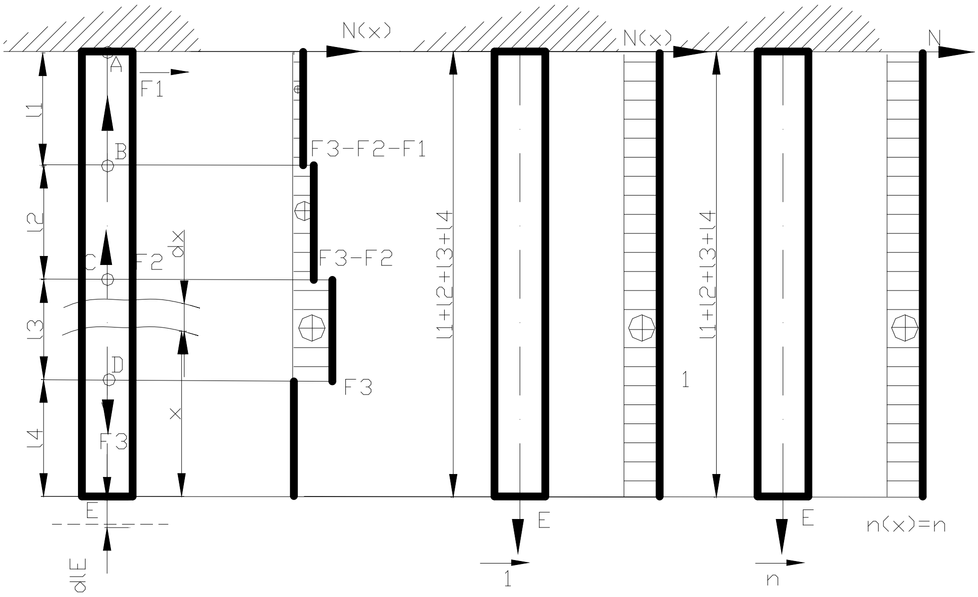


Figura 40

$$\int_l dL_{12} = L_{12} = \int_l \frac{N.n}{EA} dx.$$

În care N(x), este forţa axială într-0 secţiune curentă, datorită încărcării reale a barei , iar (n), este forţa axială în secţiune curentă, datorită încărcării versor (unitare) aplicată în punctul şi pe direcţia deplasării căutate. $L_{21} = 1\ \delta = \delta$; $L_{12} = L_{21}$; $\delta = \sum \int_l \frac{N(x).n}{EA} dx$, din

$1.\delta = \sum \int_l \frac{N(x).n}{EA}dx$; [1] .[δ] = $\frac{[N].[n]}{[E].[A]}[dx]$; [N]. [m] = $\frac{[N].[N]}{[\frac{N}{m^2}].[m^2]}[m]$

; [N]. [m] = [N]. [m] .

La o bară solicitată la încovoiere din figura 42 a), la fel aplicăm teorema reciprocităţii a lui Betti, prima stare de încărcare este cea reală , căreia îi corespunde diagrama de momente M_{iz} (x) , pentru a determina săgeata în secţiunea (1) aflată la distanţa l_5 faţă de reazemul din A, a doua stare de încărcare este cea produsă de forţa

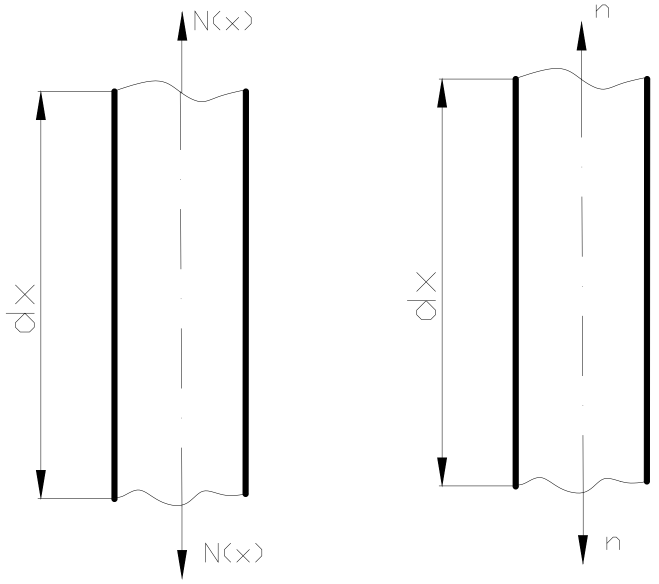


Figura 41

versor (unitară) aplicată în secţiunea considerată şi pe direcţia săgeţii căutate şi pentru această stare de încărcare am făcut diagrama de momente încovoietoare m_{iz} (x) . Dacă se iau elemente infinitezimale dx ,din cele două bare încărcate astfel, cuplurile m_{iz} (x) din a doua stare de încărcare produc

un unghi de rotire : $\Delta\varphi = \frac{m_{iz}(x)}{EI_z}dx$; în acest caz

$, dL_{12} = M_{iz}(x).\Delta\varphi = \frac{M_{iz}(x).m_{iz}(x)}{EI_z}dx$; se integrează ,

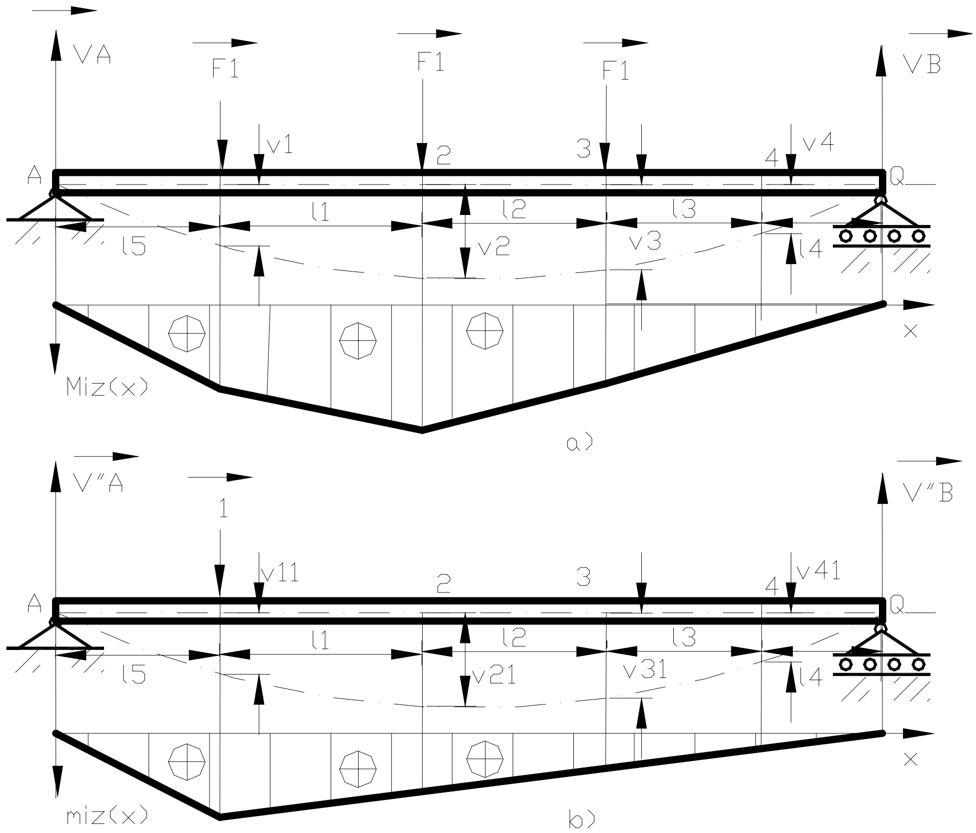


Figura 42a

$$\sum \int_l dL_{12} = L_{12} = \sum \int_l \frac{M_{iz}(x).m_{iz}(x)}{EI_z} dx \ ;$$

$L_{12} = L_{21}$; $L_{21} = 1.\ \delta = \delta$;

$$\delta = \sum \int_l dL_{12} = L_{12} = \sum \int_l \frac{M_{iz}(x).m_{iz}(x)}{EI_z} dx$$, care este o formă particulară a teoremei **Mohr-Maxwell** pentru calculul deplasărilor.

$$1.\delta = \sum \int_l \frac{M_{iz}(x).m_{iz}(x)}{EI_z} dx \ ; \ [1].[\delta] = \sum \int_l \frac{[M_{iz}(x)].[m_{iz}(x)]}{[E][I_z]} [dx] \ ;$$

$$[N][m] = \frac{[N.m].[N.m]}{[\frac{N}{m^2}][m^4]} [m] \ ; \quad [N.m] = [Nm]$$

Dacă se generalizează , aplicând forţa versor (unitară) sau momentul versor (unitar) în secţiune şi pe direcţia deplasării căutate produce eforturi : n, t, m_{iz} , m_t expresia deplasării devine:

$$\delta = \sum \int_l \frac{N(x).n(x)}{EA}dx + \sum \int_l \frac{k.T(x).t(x)}{GA}dx + \sum \int_l \frac{M_{iz}(x).m_{iz}(x)}{EI_z}dx +$$

$$+ \sum \int_l \frac{M_t(x).m_t(x)}{GI_d}dx$$

, unde n(x) , N(x) , m_t (x), m_{iz} (x)
sunt respectiv forţa axială , forţa tăietoare , momentul de torsiune şi momentul încovoietor produse de sarcina versor (unitară) într-o secţiune curentă. Dacă există un sistem de bare curbe , atunci expresia pentru δ va fi :

$$\delta = \sum \int_s \frac{N(s).n(s)}{EA}ds + \sum \int_s \frac{k.T(s).t(s)}{GA}ds + \sum \int_s \frac{M_{iz}(s).m_{iz}(s)}{EI_z}ds +$$

$$+ \sum \int_s \frac{M_t(s).m_t(s)}{GI_d}ds .$$

Când deplasarea rezultă din calcul pozitivă , înseamnă că, ea are sensul forţei versor (unitare) sau a momentului versor (unitar) .

Pentru încovoiere $\delta = \sum \int_l \frac{M_{iz}(x) m_{iz}(x)}{EI_z}dx$;

avem produsul a două funcţii M_{iz} (x) şi m_{iz} (x) , cu menţiunea că m_{iz} (x) pentru barele drepte , va fi tot timpul o funcţie liniară şi de aici se va aplica metoda lui Vereşceaghin de calcul a integralelor. Această metodă de calcul fiind o metodă grafo-analitică de calcul din figura 42 b , dacă pentru o bară cu EI_z = constant, rămâne de calculat $\int M_{iz}(x).m_{iz}(x)dx$, din desen m_{iz} (x) = x tg α ; în triunghiul AMN,

$$tg\alpha = \frac{MN}{AM}; \qquad tg\alpha = \frac{m_{iz}(x)}{x};$$

m_{iz} (x) = x .tg α ; elementul de arie dA , al diagramei M_{iz} (x) este , dA = M_{iz} (x). dx ; se integrează şi se obţine:

$$\int M_{iz}(x).m_{iz}(x)dx = \int M_{iz}(x)dx.m_{iz}(x) = \int dA.m_{iz}(x) = \int dA.x.tg\alpha =$$

$$= tg\alpha \int x.dA = (\ tg\alpha.\ )(\ x_C.A.\ )$$

x_C tgα = PQ = y_C.

Iar x_C fiind centrului de greutate al primei diagrame M_{iz} (x). Unde (A) este egală cu aria totală a diagramei M_{iz} (x) , din diagramă se observă că , $\int M_{iz}(x).m_{iz}(x)dx = A.y_C$; se înmulţeşte aria întreagă a diagramei M_{iz} (x), cu ordonata y_C pe care o are diagrama liniară m_{iz} (x) în dreptul centrului de greutate al primei diagrame.

Dar în cazul nostru, cum avem diagramele pe mai multe regiuni şi diagrama lui m_{iz} (x) este formată dintr-o linie frântă atunci se calculează astfel: $\int M_{iz}(x), m_{iz}(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i y_{iC}$; unde (i) reprezintă numărul de segmente de dreaptă care formează diagrama m_{iz} (x).

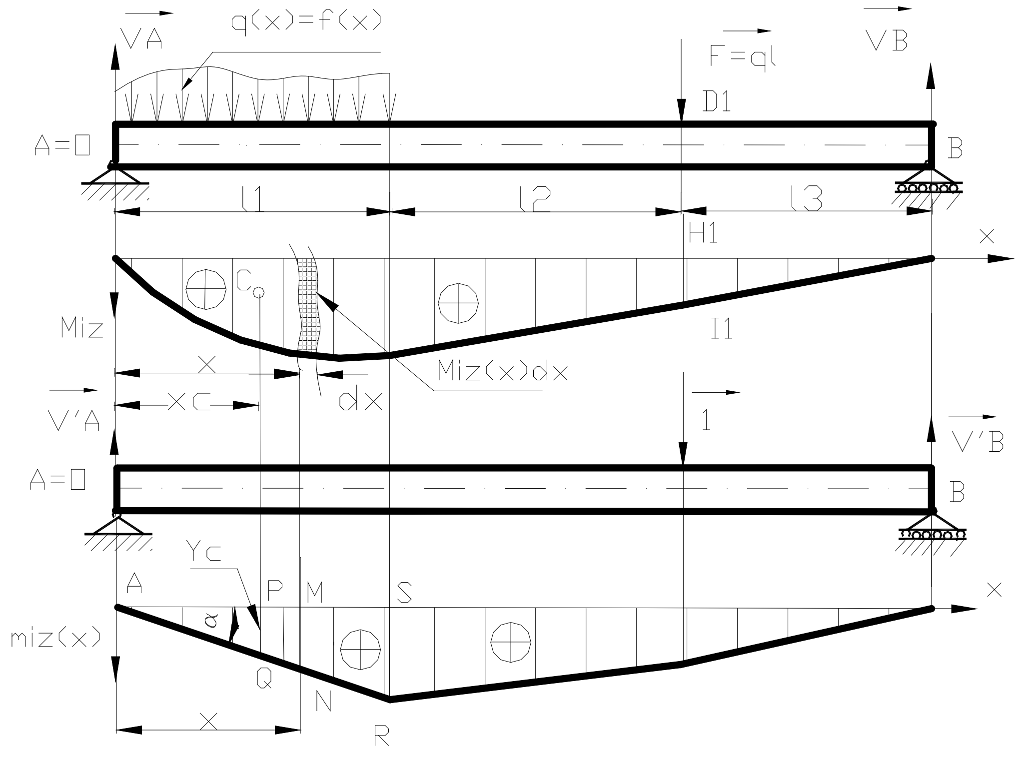


Figura 42 b

Problema nr.10

Pentru bara din figura 43 , să se determine unghiurile de pe reazemele A şi B , adică φ_A respectiv φ_B , prin metoda Mohr-Maxwell, ştiind că : q = 1,7 N/m ; l = 0,85 m ; E = 2,1 .10^5 N/mm^2 secţiunea pătrată cu gol cu: a =20 mm şi b = 40 mm.

$\sum F_y = 0$; $V_A + V_B = 2ql$; ecauţia de verificare.

$\sum M_{iz}(A) = 0$; $2ql.l + ql^2 - V_B .9l = 0$; $V_B = \dfrac{ql}{3}$; $\sum M_{iz}(B) = 0$; $-2ql.8l + ql^2 + V_A .9l = 0$; $V_A = \dfrac{5ql}{3}$; $V_A + V_B = 2ql$ ecauţia de

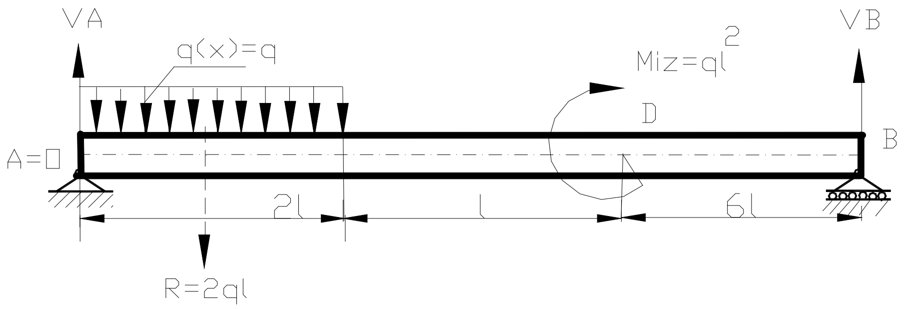


Figura 43

verificare ; $\dfrac{5ql}{3} + \dfrac{ql}{3} = \dfrac{6ql}{3} = 2ql$; ecauţia de verificare este îndeplinită

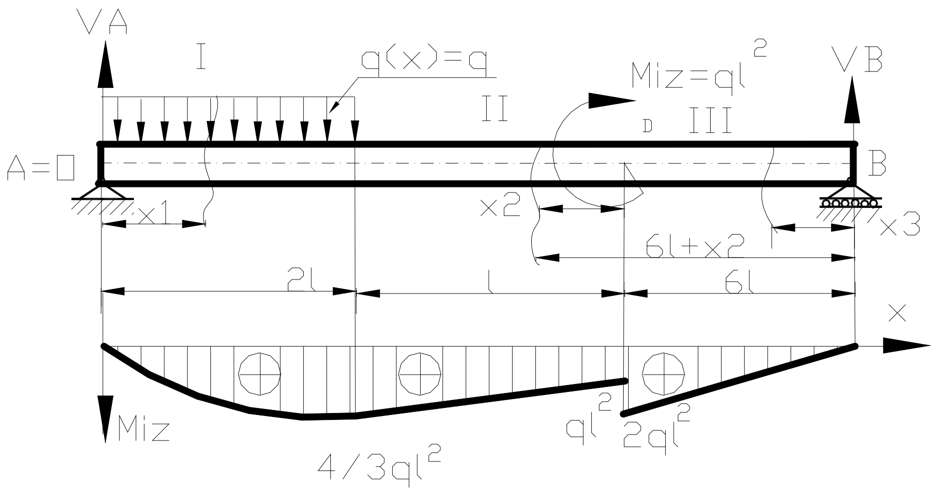


Figura 44

Regiunea întâi

$x_1 \in (0;2l]$; $M_{iz}(x_1) = \frac{5qlx_1}{3} - \frac{qx_1.x_1}{2} = \frac{5qlx_1}{3} - \frac{qx_1^2}{2}$;

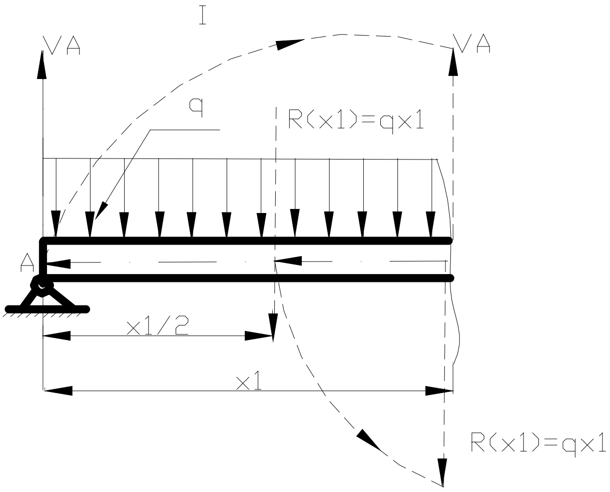


Figura 45

$$\lim_{x_1 \uparrow 2l} M_{iz}(x_1) = \frac{5ql.(2l)}{3} - q\frac{(2l)^2}{2} = \frac{4ql^2}{3};$$

$$\frac{dM_{iz}(x_1)}{dx_1} = \frac{5ql}{3} - qx_1; \quad \frac{d^2M_{iz}(x_1)}{dx_1^2} = -q < 0 \quad ; \quad \text{concavă} .$$

Metoda a doua de calcul a lui M_{iz} (x_1) :

$$\frac{dT(x_1)}{dx_1} = -q;$$

dT =- q .dx$_1$; $\int dT(x_1) = T(x_1) = -\int qdx_1 = -qx_1 + C_1$;

determinăm constanta C_1 , din condiţiile iniţiale ale lui Cauchy:

$$\lim_{x_1 \downarrow 0} T(x_1) = \frac{5ql.}{3} = q.0 + C_1, \quad \text{deci} \quad C_1 = \frac{5ql}{3}.$$

$T(x_1) = -\int q.dx_1 = -qx_1 + C_1 = -qx_1 + \frac{5ql}{3}$; iar $\frac{dM_{iz}(x_1)}{dx_1} = T(x_1)$;

$dM_{iz}(x_1) = T(x_1)dx_1$; integrăm ,

$\int dM_{iz}(x_1) = M_{iz}(x_1) = \int T(x_1)dx_1 = \int\left(-qx_1 + \frac{5ql}{3}\right)dx_1 =$
$= -\frac{qx_1^2}{2} + \frac{5qlx_1}{3} + D_1$; determinăm

constanta D_1 , din condiţiile iniţiale ale lui Cauchy,

$\lim\limits_{x_1 \downarrow 0} M_{iz}(x_1) = 0 = -\frac{q.0^2}{2} + \frac{5ql.0}{3} + D_1$; $D_1 = 0$;

$M_{iz}(x_1) = -\frac{qx_1^2}{2} + \frac{5qlx_1}{3}$

Reguanea a III-a

$x_3 \in (0;6l]\ M_{iz}(x_3) = \frac{qlx_3}{3}$; $\lim\limits_{x_3 \downarrow 0} M_{iz}(x_3) = 0$;

$\lim\limits_{x_3 \uparrow 6l} M_{iz}(x_3) = \frac{ql.(6l)}{3} = 2ql^2$.

Metoda a doua de calcul

$q(x_3) = 0$; $\frac{dT(x_3)}{dx_3} = q(x_3) = 0$; $dT = 0\ .dx_3$;

$\int dT(x_3) = T(x_3) = \int 0dx_3 = C_3$;

determinăm constanta C_3 , din condiţiile iniţiale ale lui Cauchy

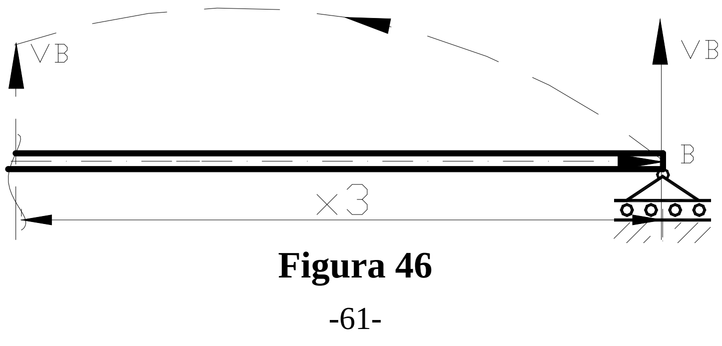


Figura 46

$$\lim_{x_3 \downarrow 0} T(x_3) = -\frac{ql.}{3} = C_3, \quad \text{deci} \quad C_3 = -\frac{ql}{3};$$

$$T(x_3) = -\frac{ql}{3}\ ; \quad \text{iar} \quad \frac{dM_{iz}(x_3)}{dx_3} = -T(x_3)\ ; \quad dM_{iz}(x_3) = -T(x_3)dx_3;$$

integrăm ,

$$\int dM_{iz}(x_3) = M_{iz}(x_3) = -\int T(x_3)dx_3 = -\int\left(-\frac{ql}{3}\right)dx_3 = \frac{qlx_3}{3} + D_3;$$

determinăm constanta D_3 , din condiţiile iniţiale ale lui Cauchy,

$$\lim_{x_3 \downarrow 0} M_{iz}(x_3) = 0 = D_3 + \frac{ql.0}{3}\ ; \quad D_3 = 0\ ; \ M_{iz}(x_3) = \frac{qlx_3}{3}.$$

Regiunea a II-a

$x_2 \in [0; l)$

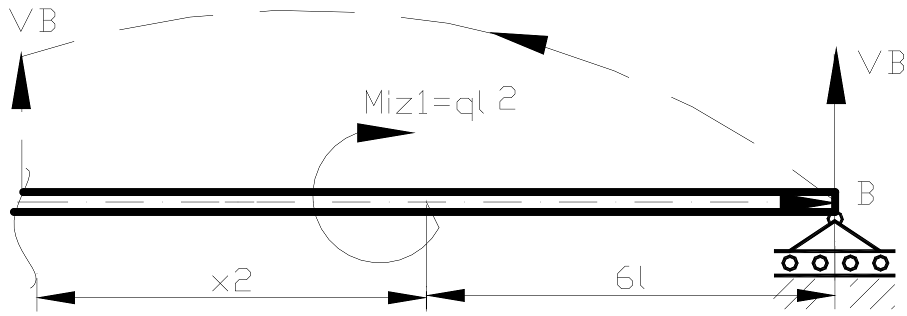


Figura 47

$$M_{iz}(x_2) = \frac{ql(6l + x_2)}{3} - ql^2 = ql^2 + \frac{qlx_2}{3};$$

$$\lim_{x_2 \downarrow 0} M_{iz}(x_2) = 2ql^2 - ql^2 = ql^2;$$

$$\lim_{x_2 \uparrow l} M_{iz}(x_2) = \frac{ql.(6l + l)}{3} - ql^2 = \frac{4}{3}ql^2;$$

Metoda a doua de calcul

q (x2) = 0 ; $\frac{dT(x_2)}{dx_2}=q(x_2)=0$; dT =0 .dx2;

$\int dT(x_2)=T(x_2)=\int 0dx_2 =C_2$;

determinăm constanta C2 , din condiţiile iniţiale ale lui Cauchy:

$\frac{\lim}{x_2 \downarrow 0}T(x_2)=-\frac{ql.}{3}=C_2$, deci $C_2 =-\frac{ql}{3}$;

$T(x_2)=-\frac{ql}{3}$; iar $\frac{dM_{iz}(x_2)}{dx_2}=-T(x_2)$; $dM_{iz}(x_2)=-T(x_2)dx_2$;

integrăm ,

$\int dM_{iz}(x_2)=M_{iz}(x_2)=-\int T(x_2)dx_2 =-\int\left(-\frac{ql}{3}\right)dx_2 =\frac{qlx_2}{3}+D_2$;

determinăm constanta D2 , din condiţiile iniţiale ale lui Cauchy,

$\frac{\lim}{x_2 \downarrow 0}M_{iz}(x_2)=ql^2 =D_2 +\frac{ql.0}{3}$; D2 = ql2 ;

$M_{iz}(x_2)=\frac{qlx_2}{3}+ql^2$.

Pentru a calcula rotirea în A , se aplică în articulţia din A un moment unitar ($\vec{1}=\frac{\vec{M}_{iz1}}{|\vec{M}_{iz1}|}=\vec{u}_{\vec{M}_{iz}1}$ moment versor) , se calculează forţele de reacţiune $V_A^{'}, V_B^{'}$ din condiţiile de echilibru ale barei din figura 48a.

$\sum F_y =0$; $V^{'}{}_A +V^{'}{}_B =0$; ecauţia de verificare.

$\sum M_{iz}(A)=0$; $-V_B^{'}.9l+1=0$; $V^{'}{}_B =\frac{1}{9l}$; $\sum M_{iz}(B)=0$;

$V_A^{'}.9l+1=0$; $V^{'}{}_A =-\frac{1}{9l}$; $V^{'}{}_A +V^{'}{}_B =0$ ecauţia de verificare ; $\frac{-1}{9l}+\frac{1}{9l}=0$; ecauţia de verificare este îndeplinită .

$$\lim_{x\downarrow 0} m_{iz}(x) = \lim_{x\downarrow 0}\left[1-\frac{x}{9l}\right]=1\ ;\ \lim_{x\uparrow 9l} m_{iz}(x) = \lim_{x\uparrow 9l}\left[1-\frac{x}{9l}\right]=0\ ;$$

$$\varphi_A = \sum\int_l \frac{M_{iz}(x)m_{iz}(x)}{EI_z}dx\ ;$$

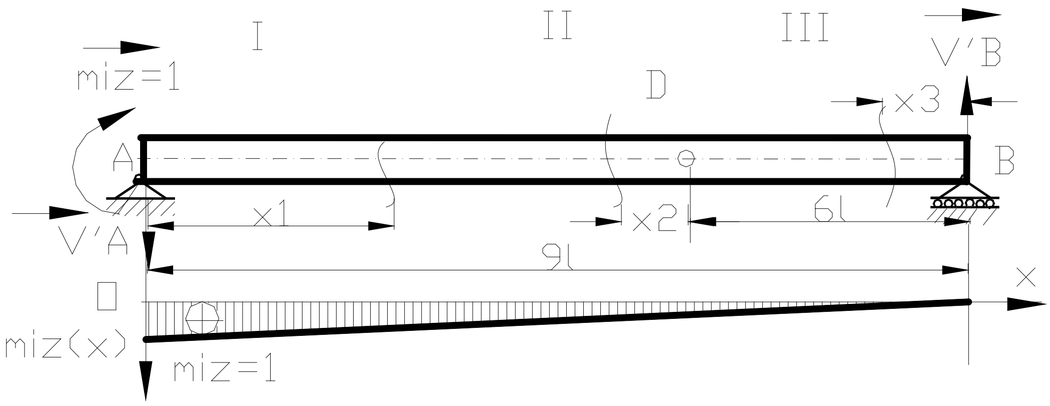


Figura 48a

$\varphi_A =$

$$= \frac{1}{EI_z}\left\{\int_0^{2l}\left(\frac{5qlx_1}{3}-\frac{qx_1^2}{2}\right)\left(1-\frac{x_1}{9l}\right)dx_1+\int_0^{l}\left(\frac{qlx_2}{3}+ql^2\right)\frac{(6l+x_2)}{9l}dx_2+\int_0^{6l}\frac{qlx_3}{3}\left(\frac{x_3}{9l}\right)dx_3\right\}$$

$$= \frac{5{,}230ql^3}{EI_z};$$

Se explicitează variaţia $m_{iz1}(x)$ pe regiuni :

$x_1 \in (0,2l)$; $m_{iz1}(x_1)=1-\dfrac{x_1}{9l}$; $x_2 \in (0,l)$ $m_{iz1}(x_2)=\dfrac{(6l+x_2)}{9l}$.

$x_3 \in (0,6l)$; $m_{iz1}(x_3)=\dfrac{x_3}{9l}$.

Trebuie ca expresiile lui M_{iz} (x) şi m_{iz}(x) să fie parcurse în acelaşi sens şi x să aibă aceeaşi origine pentru amândouă expresiile, altfel nu are sens.

Acum pentru calculul rotirii secţiunii transversale din articulatia B , se pune un moment încovoietor concentrat unitar în B din figura 48b ,

[moment versor (unitate) $\vec{m}_{iz2} = \dfrac{\vec{M}_{iz2}}{\left|\vec{M}_{iz2}\right|} = \vec{1}$] .

$\sum F_y = 0$; $V''_A + V''_B = 0$; ecauţia de verificare.

$\sum M_{iz}(A) = 0$; $V''_B .9l + 1 = 0$; $V''_B = -\dfrac{1}{9l}$; $\sum M_{iz}(B) = 0$;

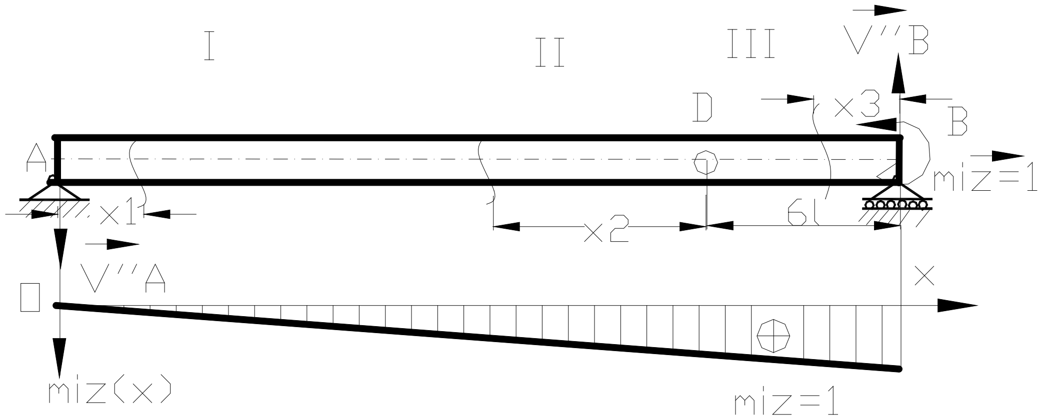


Figura 48b

$V''_A .9l - 1 = 0$; $V''_A = \dfrac{1}{9l}$; $V'_A + V'_B = 0$ ecauţia de verificare

; $\dfrac{-1}{9l} + \dfrac{1}{9l} = 0$; ecauţia de verificare este îndeplinită .

$x \in (0,9l)$; $m_{iz}(x) = \dfrac{x}{9l}$; $\lim\limits_{x \downarrow 0} m_{iz}(x) = \lim\limits_{x \downarrow 0} (\dfrac{x}{9l}) = 0$;

$\lim\limits_{x \uparrow 9l} m_{iz}(x) = \lim\limits_{x \uparrow 9l} [\dfrac{x}{9l}] = 1$; $\varphi_B = \sum \int_l \dfrac{M_{iz}(x) m_{iz}(x)}{EI_z} dx$;

Se explicitează variaţia $m_{iz2}(x)$ pe regiuni :

$x_1 \in (0,2l)$; $m_{iz2}(x_1) = \dfrac{x_1}{9l}$; $x_2 \in (0,l)$; $m_{iz2}(x_2) = 1 - \dfrac{(6l + x_2)}{9l}$;

$x_3 \in (0,6l)$; $m_{iz}(x_3) = 1 - \dfrac{x_3}{9l}$;

$$\varphi_B = \frac{1}{EI_z}\cdot$$

$$\left\{\int_0^{2l}\left(\frac{5qlx_1}{3}-\frac{qx_1^2}{2}\right)\left(\frac{x_1}{9l}\right)dx_1+\int_0^{l}\left(\frac{qlx_2}{3}+ql^2\right)[1-\frac{(6l+x_2)}{9l}]dx_2+\int_0^{6l}\frac{qlx_3}{3}\left(1-\frac{x_3}{9l}\right)dx_3\right\}$$

$$=\frac{3{,}931481ql^3}{EI_z}$$

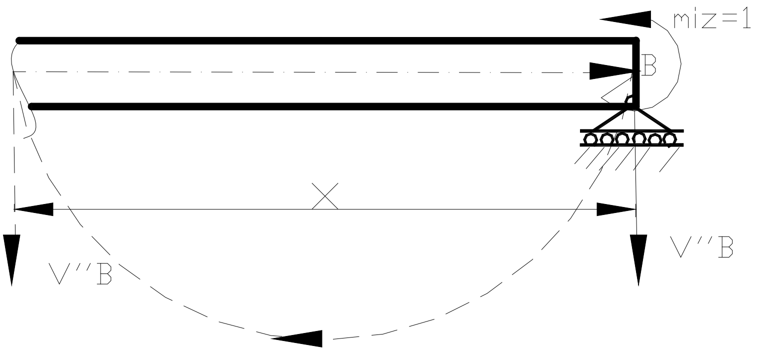


Figura 49

$$I_z = \frac{40^4}{12}-\frac{20^4}{12}=2.10^5\,mm^4;$$

$$\varphi_A = \frac{5{,}230.\frac{1{,}7N}{m}.(0{,}85m)^3}{2{,}1.10^5\,\frac{N}{mm^2}\,2.10^5\,mm^4}=\frac{5{,}230.1{,}7.(0.85)^3 10^6}{2{,}1.10^5.2.10^5}=1{,}3.10^{-4}[rad];$$

$$\varphi_B = \frac{3{,}931481.\frac{1{,}7N}{m}.(0{,}85m)^3}{2{,}1.10^5\,\frac{N}{mm^2}\,2.10^5\,mm^4}=\frac{3{,}931481.1{,}7.(0.85)^3 10^6}{2{,}1.10^5.2.10^5}==0{,}9710^{-4}[rad].$$

6.19.Grinzi drepte static nedeterminate
6.19.1.Introducere

Dacă eforturile din secţiunile transversale ale barelor sau ale sistemelor de bare, nu se pot determina numai cu ajutorul metodelor de calcul ale staticii, fie din cauza unor legături suplimentare, fie din cauza formei sistemului, barele şi sistemele de bare de acest fel se numesc bare sau sisteme de bare static nedeterminate.
Sistemele de bare static nedeterminate pot fi :

a) sisteme cu nedeterminări exterioare

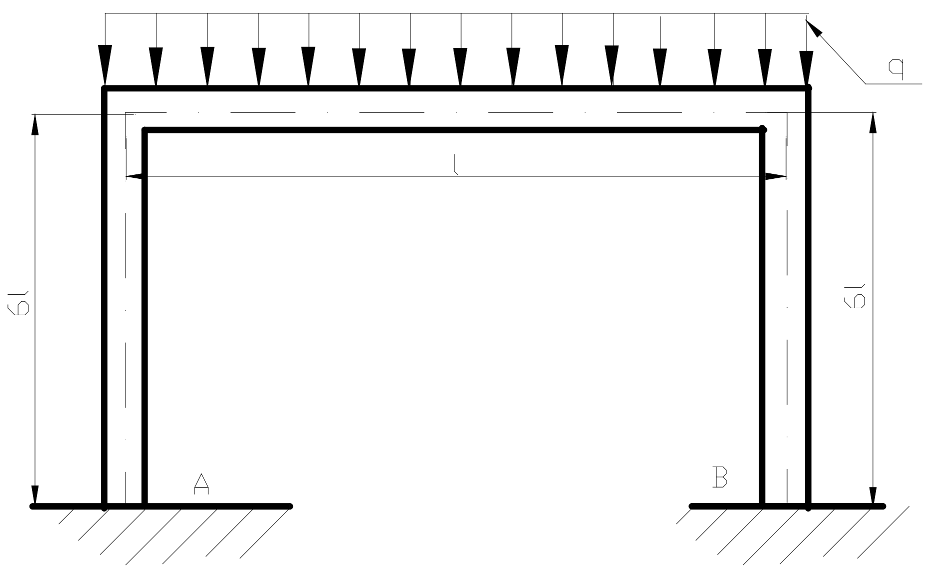


Figura 50

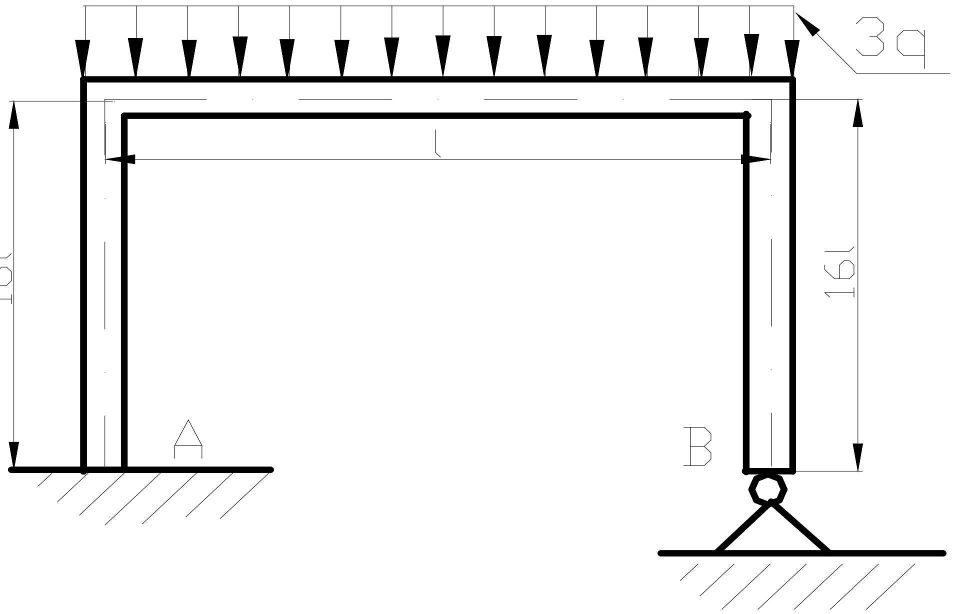


Figura 51

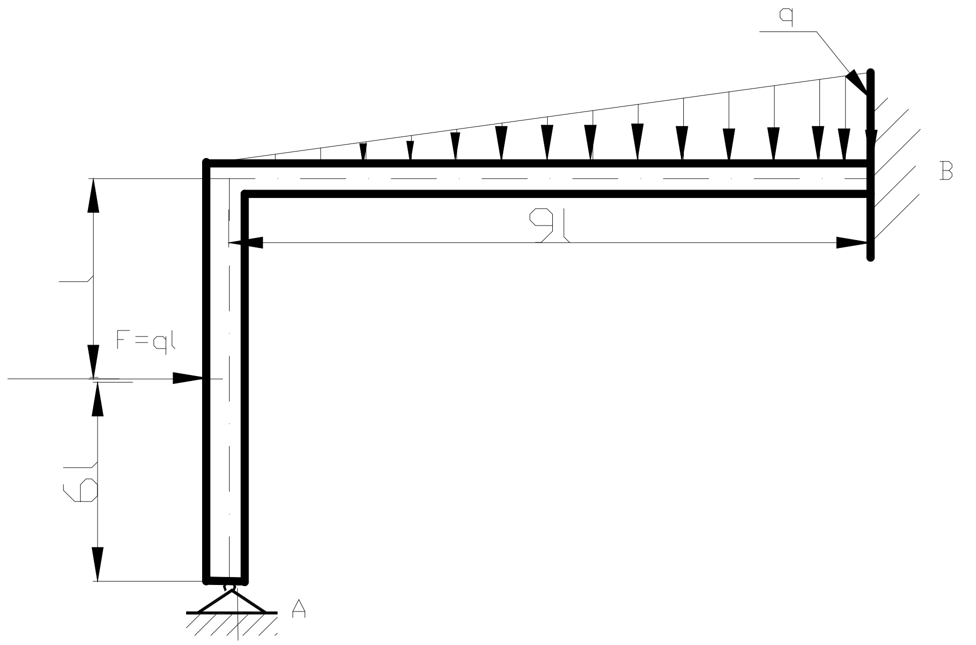


Figura 52

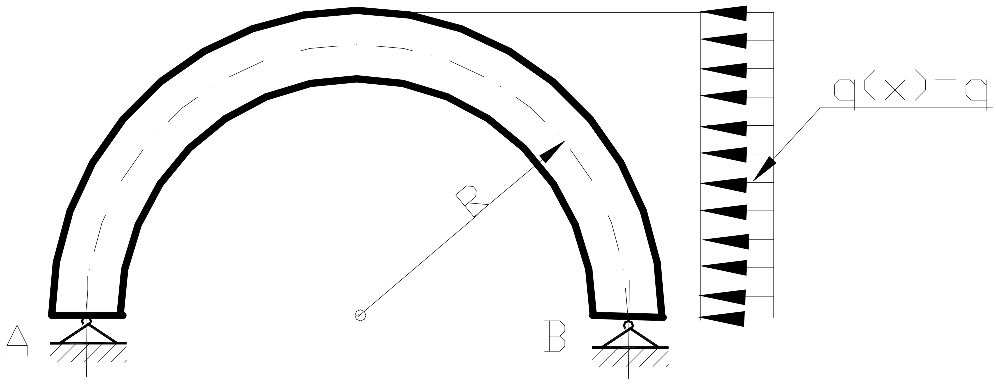


Figura 53

b) sisteme cu nedeterminări interioare

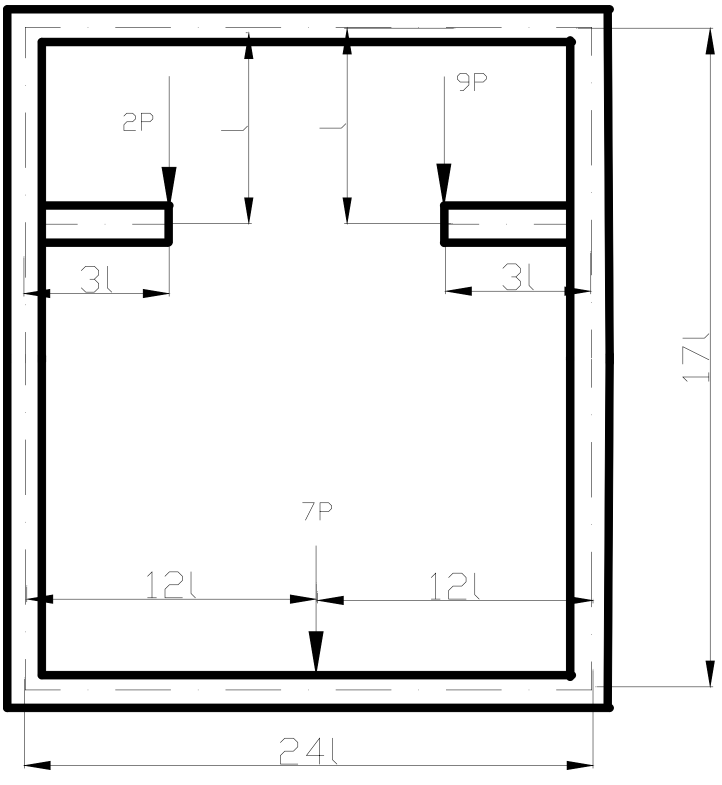


Figura 54

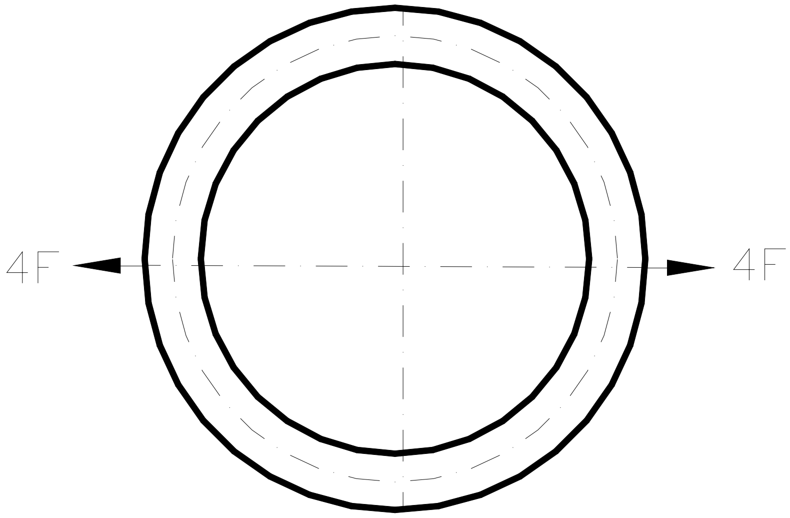


Figura 55

c)sisteme cu nedeterminări interioare şi exterioare

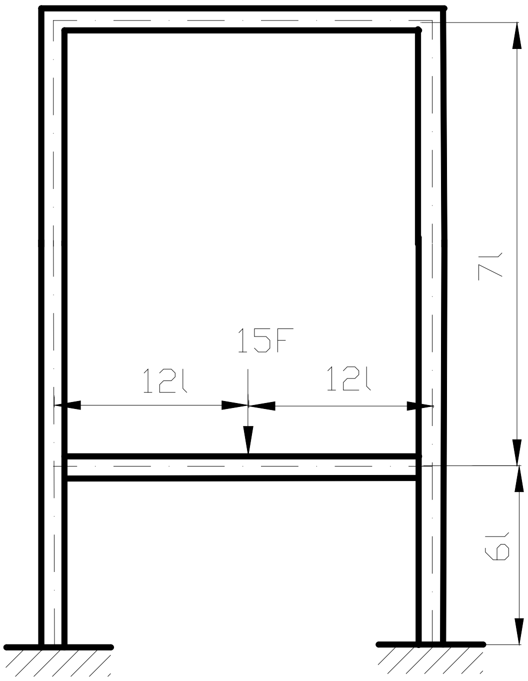


Figura 56

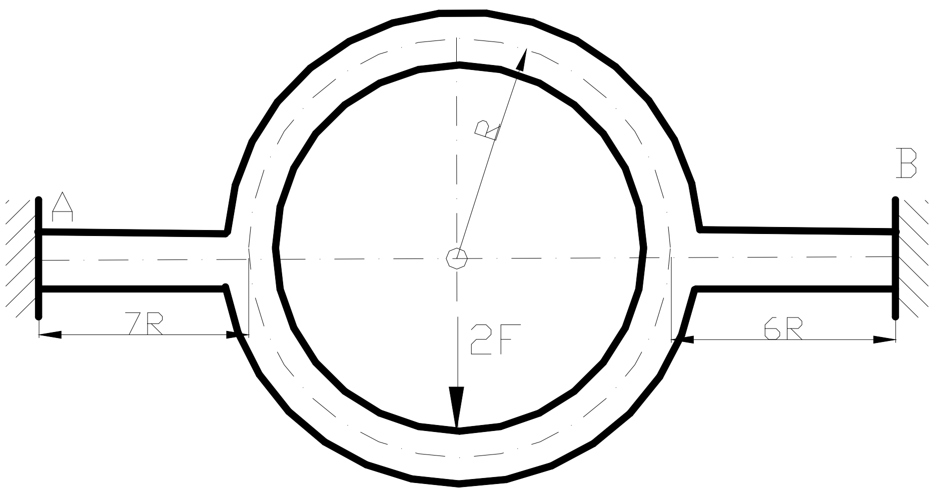


Figura 57

a)Sistemele cu nedeterminări exterioare

Bara dreaptă
Bara curbă din figura 53.
Cadre din figurile: 50, 51 , 52.

b)Sistemele cu nedeterminări interioare

Cadru închis figura 54
Inel figura 55.

c)Sisteme cu nedeterminări interioare şi exterioare

Inel încastrat figura 57.
Cadru etajat figura 56.

În acest capitol se abordează numai barele static nedeterminate, unde ridicarea nedeterminărilor exterioare se bazează pe condiţiile de legătură, anume , o bară dreaptă în încastrare nu are săgeată sau rotire (sunt egale cu zero) , în reazem rigid , bara nu are săgeată (este egală cu zero) .

Folosind condiţiile de legătură , la rezolvarea problemelor static nedeterminate se obţin ecuaţiile de echilibru elastic, cu ajutorul ecuaţiilor de echilibru static şi elastic , se obţine un sistem de ecuaţii compatibil unic determinat (admite o soluţie unică) .

Probleme static nedeterminate
Ridicarea nedeterminării prin metoda integării analitice a ecuaţiei diferenţiale a fibrei medii deformate

Problema nr:1

Să se dimensioneze bara din figura următoare, ştiid că : q = 3 N/m ; l = 0,78 m ; E = 2,1.10^5 N/ mm^2 ; $\sigma_a = 105 \frac{N}{mm^2}$.

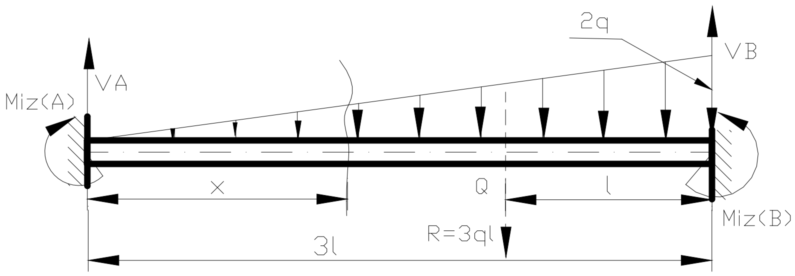


Figura 58

Scriem condiţiile de echilibru static:

$\sum F_y = 0$; $V_A + V_B = 3ql$; ecauţia de verificare.

$\sum M_{iz}(A) = 0$; $M_{izA} + 3ql.2l - V_B.3l - M_{izB} = 0$;

$$\begin{cases} V_A + V_B = 3ql \\ M_{izA} - M_{izB} - V_B * 3l = -6ql^2 \end{cases}$$

Avem 4 necunoscute (V $_A, V_B, M_{izA}, M_{izB}$) şi două ecuaţii , problema este dublu static nedeterminată. Ridicăm nedeterminarea din condiţia de deformaţii, avem: v $_A = 0, \varphi_A = 0, v_B = 0, \varphi_B = 0$. $x \in (0;3l)$; $\Delta AMN \approx \Delta ASB$ din figura 59 aplicăm teorema lui Thales (de asemănare a triunghiurilor) $\frac{q(x)}{2q} = \frac{x}{3l}$; q(x)=$\frac{2qx}{3l}$

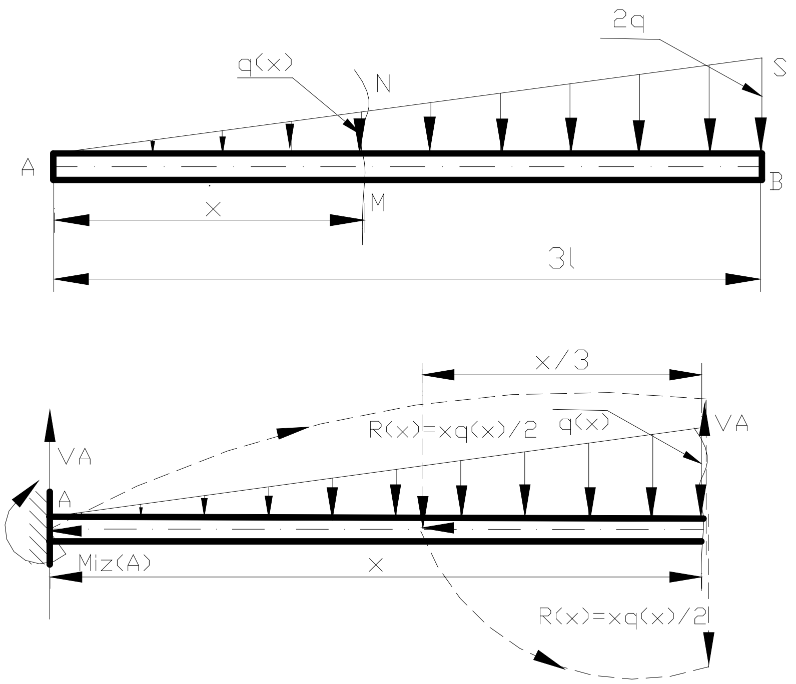


Figura 59

R(x)=$\frac{xq(x)}{2}=\frac{x}{2}*\frac{2qx}{3l}=\frac{qx^2}{3l}$; $M_{iz}(x)=V_A x+M_{izA}-\frac{qx^2}{3l}*\frac{x}{3}$;

$M_{iz}(x)=V_A.x+M_{iz}(A)-\frac{qx^3}{9l}$

<u>Metoda a II-a</u> de calcul a lui $M_{iz}(x)$; q(x)= ax+b este o dreaptă, sarcina distribuită. Alegem o origine 0=A şi aflăm pe a şi b din desen (dacă se ştiu două puncte de pe o dreaptă se ştie toată dreapta) .

$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} q(x)=0$; $\lim_{\substack{x\to 3l\\x<3l}} q(x)=2q$; $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}(ax+b)=0$; a*0 + b = 0 ; b = 0

$\lim\limits_{\substack{x \to 3l \\ x < 3l}} q(x) = 2q$; $\lim\limits_{\substack{x \to 3l \\ x < 3l}} (ax + b) = 2q$; a 3l = 2q ; a = $\frac{2q}{3l}$. Deci

q(x) = a x + b ; q(x) = $\frac{2q}{3l} x + b$

q(x) = $\frac{2q}{3l} x$; $\frac{dT}{dx} = -q(x)$; dT = -q(x) dx , $\int dT = -\int q(x) dx$;

T(x)=-$\int \frac{2qx}{3l} dx = -\frac{2q}{3l} \frac{x^2}{2} + C_1$

T(x)=-$\frac{qx^2}{3l} + C_1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} T(x) = V_A$; -$\frac{q.0^2}{3l} + C_1 = V_A$; $C_1 = V_A$;

T(x)=$V_A - \frac{qx^2}{3l}$

$\frac{dM_{iz}(x)}{dx} = T(x)$; $dM_{iz}(x) = T(x) dx$; $\int dM_{iz}(x) = \int T(x) dx$;

$M_{iz}(x) = \int \left(V_A - \frac{qx^2}{3l} \right) dx$

$M_{iz}(x) = V_A x - \frac{q}{3l} \frac{x^3}{3} + D_1$; $M_{iz}(x) = V_A x - \frac{q}{3l} \frac{x^3}{3} + D_1$;

$M_{iz}(x) = V_A x - \frac{qx^3}{9l} + D_1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} M_{iz}(x) = M_{iz}(A)$; $V_A * 0 - \frac{q0^3}{9l} + D_1 = M_{iz}(A)$;

$D_1 = M_{iz}(A)$ deci $M_{iz}(x) = V_A . x - \frac{qx^3}{9l} + M_{iz}(A)$

Aplicăm ecuaţia fibrei medii deformate $\quad E\,I_z \frac{d^2v}{dx^2} = -M_{iz}(x)$;

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = -V_A x + \frac{qx^3}{9l} - M_{iz}(A)$$

$$E\,I_z \frac{dv}{dx} = -V_A \frac{x^2}{2} - xM_{iz}(A) + \frac{q}{36l}x^4 + C \quad ;$$

$$EI_z v(x) = -V_A \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}M_{iz}(A) + \frac{q}{180l}x^5 + Cx + D$$

Am luat originea în A=0 ,C=0 , D=0 , aici $\varphi_A = \varphi_0 = \frac{C}{EI_z} = 0$;

$v_A = v_0 = \frac{D}{EI_z} = 0$, deci,

$$\begin{cases} EI_z \frac{dv}{dx} = -\frac{V_A x^2}{2} - xM_{izA} + \frac{qx^4}{36l} \\ \hline EI_z v(x) = -\frac{V_A x^3}{6} - \frac{x^2}{2}M_{iz}(A) + \frac{q}{180l}x^5 \end{cases}$$

Din cele 4 condiţii de reazem am folosit numai două , avem săgeata şi rotirea din A sunt zero. $\quad \varphi_A = 0$; $v_A = 0$. Cele două ecuaţii care le mai folosim pentru a ridica nedeterminarea sunt $\varphi_B = 0$ şi $v_B = 0$ (săgeata şi rotirea din încastrarea din B sunt zero).

$$0 = \varphi_B = \lim_{\substack{x \to 3l \\ x < 3l}} \frac{dv}{dx} = \lim_{\substack{x \to 3l \\ x < 3l}} \frac{-V_A \frac{x^2}{2} - xM_{iz}(A) + \frac{qx^4}{36l}}{EI_z} \quad ; \; -$$

$$V_A(3l)^2 - 3lM_{iz}(A) + \frac{q}{36l}(3l)^4 = 0$$

$$-\;4{,}5\,V_A l - 3M_{iz}(A) + 2{,}25ql^2 = 0 \quad ;$$

$-\frac{9}{2}V_A l - 3M_{iz}(A) + 9\frac{q}{4}l^2 = 0$

şi a patra ecuaţie o obţinem din :

$$v_B = 0 = \lim_{\substack{x \to 3l \\ x < 3l}} v(x) = \lim_{\substack{x \to 3l \\ x < 3l}} \frac{-\frac{V_A x^3}{6} - \frac{x^2}{2}M_{izA} + \frac{qx^5}{180l}}{EI_z}$$

$$\frac{-\frac{V_A}{6}(3l)^3 - \frac{(3l)^2}{2}M_{izA} + \frac{q}{180l}(3l)^5}{EI_z} = 0 \quad ;$$

$$-\frac{V_A}{6}3^3 l - \frac{9}{2}M_{izA} + \frac{3^5}{180}ql^2 = 0$$

$-4{,}5\, V_A l - 4{,}5M_{izA} + 1{,}35ql^2 = 0$

$$\begin{cases} (1) V_A + V_B = 3ql \\ (2) M_{iz}(A) - V_B 3l - M_{iz}(B) + 6ql^2 = 0 \\ (3) -4{,}5V_A l - 3M_{iz}(A) + 2{,}25ql^2 = 0 \\ (4) -4{,}5V_A l - 4{,}5M_{iz}(A) + 1{,}35ql^2 = 0 \end{cases}$$

Din (3) şi (4) rezolvăm şi aflăm pe V_A şi $M_{iz}(A)$

$$\begin{cases} -4{,}5V_A l - 3M_{iz}(A) + 2{,}25ql^2 = 0 \\ -4{,}5V_A l - 4{,}5M_{iz}(A) + 1{,}35ql^2 = 0 \end{cases}$$

$-4{,}5V_A - 3M_{iz}(A) + 2{,}25ql^2 = 0$

$4{,}5\, V_A + 4{,}5M_{iz}(A) - 1{,}35ql^2 = 0$

rezultă : $1{,}5\, M_{iz}(A) + 0{,}9ql^2$; $M_{iz}(A) = -\frac{0{,}9}{1{,}5}ql^2$;

$M_{iz}(A) = -0{,}6ql^2$

-4,5 $V_A l - 3M_{iz}(A) + 2{,}25ql^2 = 0$; -4,5

$V_A l - 3 * 0{,}6ql^2 + 2{,}25ql^2 = 0$; $4{,}5V_A l = 2{,}25ql^2 - 1{,}8ql^2$

$$V_A l = \frac{ql^2}{4{,}5}(2{,}25 - 1{,}8) = 0{,}1ql^2$$

Din (1) $V_A + V_B = 3ql$; $0{,}1\,ql + V_B = 3ql$; $V_B = 2{,}9ql$

Din (2) $M_{iz}(A) - V_B 3l - M_{iz}(B) + 6ql^2 = 0$;

$-0{,}6ql^2 - 2{,}9ql * 3l - M_{izB} + 6ql^2 = 0$

$M_{iz}(B) = ql^2(-0{,}6 - 2{,}9 * 3 + 6) = -3{,}3ql^2$; $M_{iz}(B) = -3{,}3ql^2$

$V_A = 0{,}1ql$

$M_{iz}(A) = -0{,}6ql^2$

$V_B = 2{,}9ql$

Deci , dacă s-au obţinut $M_{iz}(A)$ şi $M_{iz}(B)$, negative le schimbăm sensul pentru că iniţial l-am pus la întâmplare.

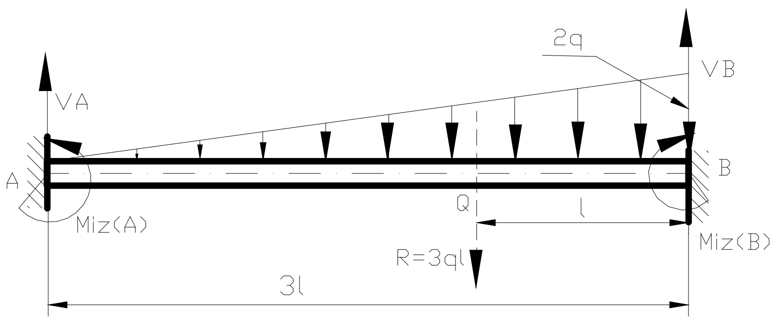


Figura 60

Ne verificăm dacă am calculat corect din $\sum M_{iz}(Q) = 0$

$0{,}1\,ql * 2l - 0{,}6\,ql^2 + 3{,}3ql^2 - 2{,}9l * l = 0$;

$ql^2(0{,}2 - 0{,}6 + 3{,}3 - 2{,}9) = 0$; $ql^2(3{,}5 - 3{,}5) = 0$; 0 = 0 verifică.

Dacă într-un punct nu verifică , rezultă că nu s-au calculat corect, s-a greşit la calcul . Această metodă analitică se foloseşte când avem cel mult două regiuni pentru că rezultă un calcul mai greoi.

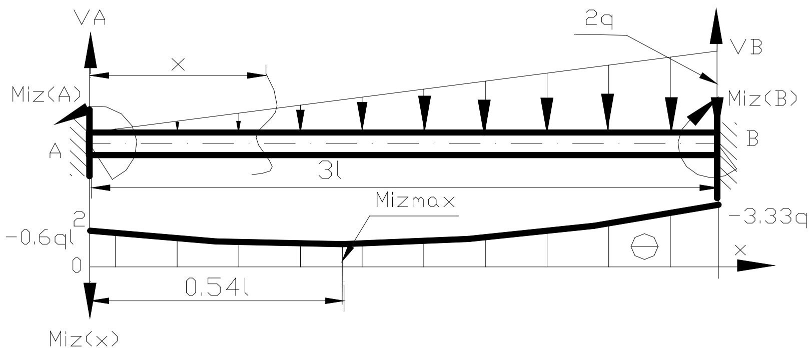


Figura 61

$$\mathrm{M}_{iz}(x)=V_A x-\frac{qx^3}{9l}+M_{iz}(A)$$ unde $\mathrm{V}_A=0{,}1ql$; $\mathrm{M}_{iz}(A)=-0{,}6ql^2$

se iau sensurile iniţiale.

$$M_{iz}(x)=0{,}1qlx-\frac{qx^3}{9l}-0{,}6ql^2;$$

$$\lim_{x\downarrow 0} M_{iz}(x)=\lim_{x\downarrow 0}[0{,}1qlx-\frac{qx^3}{9l}-0{,}6ql^2]=-0{,}6ql^2;$$

$$\lim_{x\uparrow 3l} M_{iz}(x)=\lim_{x\uparrow 3l}[0{,}1qlx-\frac{qx^3}{9l}-0{,}6ql^2]=-3{,}3ql^2;$$

$$\frac{dM_{iz}(x)}{dx}=0{,}1ql-\frac{qx^2}{3l}\ ;\quad \frac{d^2M_{iz}(x)}{dx^2}=-2\frac{qx}{3l}<0;$$

concavă . $$\frac{dM_{iz}(x)}{dx}=0{,}1ql-\frac{qx^2}{3l}=0;$$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{0{,}3}.l=\pm 0{,}54l$; x = 0,54 l $\in(0;3l)$

$M''_{iz}(0{,}54l)<0$, deci x = 0,54 l este un punct de maxim.

$$M_{iz}(0{,}54l)=0{,}1ql(0{,}54l)-\frac{q(0{,}54l)^3}{9l}-0{,}6ql^2=-0{,}563ql^2;$$

$M_{iz\max} = \left| -3{,}3ql^2 \right| = 3{,}3ql^2 = 3{,}3.3.\frac{N}{mm^2}(0{,}78m)^2 =$

$= 6{,}02316.10^3 N.mm$

Dimensionăm cu relaţia: $W_{znec} = \frac{\pi.d^3}{32} = \frac{M_{iz\max}}{\sigma_a}$;

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_{iz\max}}{\pi.\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{32.6{,}02316.10^3 N.mm}{\pi.\frac{105N}{mm^2}}} = 8{,}361mm;$$

d = 9 mm.

Ridicarea nedeterminării prin procedeul Clebsch

Problema nr:2

Să se verifice bara din figura 63 , ştiind că : q = 2,8 N/m ; l = 0,53 m ; $\sigma_a = 109\frac{N}{mm^2}$ iar secţiunea transversală a barei fiind cea din figura 62

.

Rezolvare:

Scriem condiţiile de echilibru static:

$\sum F_y = 0$; (1) $V_A + V_B + V_C - 4ql - 6ql = 0$;

$\sum M_{iz}(A) = 0$; (2) $4ql.2l + 6ql.6l + ql^2 - V_B.4l - V_C.7l = 0$.

Avem din condiţiile de echilibru cele două ecuaţii independente, iar numărul de necunoscute sunt trei (V_A , V_B , V_C) deci problemă este simplu static nederminată, se ridică nedeterminarea din condiţia de deformaţii, folosind procedeul Clebsch.

Notă:

Dacă se mai scrie $\sum M_{izB} = 0$; se obţine o ecuaţie care este o combinaţie liniară dintre ecuaţiile (1) şi (2) , la fel şi pentru

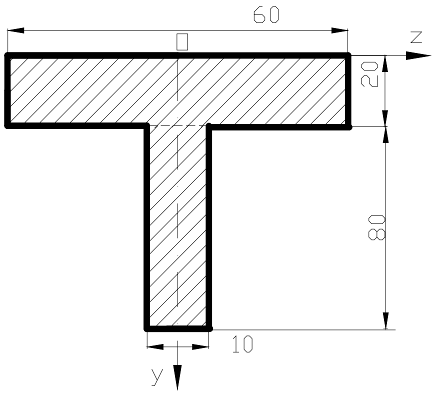


Figura 62

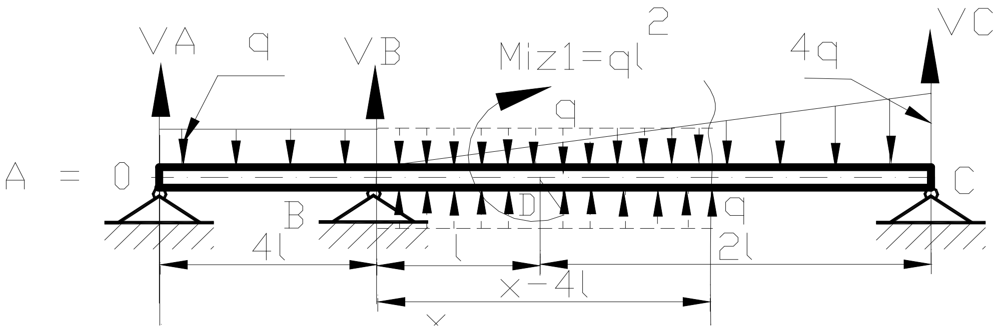


Figura 63

$\sum M_{izC} = 0$; acest lucru s- a specificat de a nu se greşi modul de abordare al problemelor static nedeterminate.

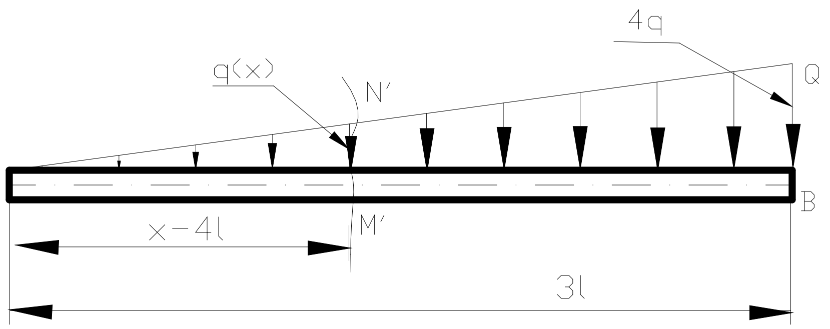


Figura 64

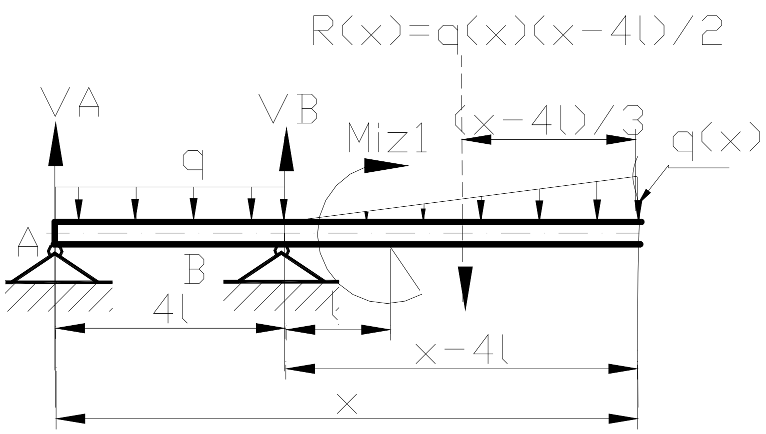


Figura 65

$$M_{iz}(x)=V_A.x-\frac{qx^2}{2}+V_B(x-4l)+\frac{q(x-4l)^2}{2}-\frac{2q(x-4l)^3}{9l}+$$
$$+ql^2(x-5l)^0;$$

$$\frac{q(x)}{4q}=\frac{(x-4l)}{3l}$$ din figura 64 ;

$$q(x)=\frac{4q}{3l}(x-4l); \qquad R_{\oplus}(x)=\frac{4q}{3l}(x-4l)\frac{(x-4l)}{2}=\frac{2q}{3l}(x-4l)^2 ;$$

$$M_{iz\oplus}(x)=-\frac{2q}{3l}(x-4l)^2\,\frac{(x-4l)}{3}=-\frac{2q}{9l}(x-4l)^3;$$

Ecuaţia fibrei medii deformate :

$$EI_z\frac{d^2v}{dx^2}=-[V_A.x-\frac{qx^2}{2}+V_B(x-4l)+\frac{q(x-4l)^2}{2}-\frac{2q(x-4l)^3}{9l}+$$
$$+ql^2(x-5l)^0];$$

$$EI_z\frac{d\ v}{dx}=-V_A.\frac{x^2}{2}+\frac{qx^3}{6}-\frac{1}{2}V_B(x-4l)^2-\frac{q(x-4l)^3}{6}+$$
$$+\frac{q(x-4l)^4}{18l}-ql^2(x-5l)+C$$

$$EI_z v(x) = -V_A.\frac{x^3}{6} + \frac{qx^4}{24} - \frac{1}{6}V_B(x-4l)^3 - \frac{q(x-4l)^4}{24} + $$
$$+\frac{q(x-4l)^5}{90l} - \frac{1}{2}ql^2(x-5l)^2 + Cx + D \quad ;$$

deoarece A = 0 fiind originea : $\frac{D}{EI_z} = v_0 = v_A = 0$; D = 0

A doua condiţie de reazem:

$$\lim_{\substack{x \to 4l \\ x<4l}} v(x) = v_B = 0 = \lim_{\substack{x \to 4l \\ x<4l}} \frac{-V_A\frac{x^3}{6} + \frac{qx^4}{24} + C_x}{EI_z};$$

$$\text{-}V_A\frac{(4l)^3}{6} + \frac{q}{24}(4l)^4 + C*4l = 0 \quad ; \quad \text{-}V_A\frac{(4l)^2}{6} + \frac{q}{24}(4l)^3 + C = 0 \quad ;$$

$$C = V_A l^2\frac{16}{6} - \frac{ql^3}{24}4^3$$

C= 2,66 $l^2 V_A - ql^3 2{,}66$; $C = 2{,}66 l^2 V_A - 2{,}66 ql^3$.

Folosind a III-a condiţie de reazem obţinem ecuaţia a III-a pentru a ridica nedeterminarea.

$$EI_z v(x) = -V_A\frac{x^3}{6} + \frac{qx^4}{24} - \frac{V_B}{6}(x-4l)^3 - \frac{q}{24}(x-4l)^4 + $$
$$+\frac{q}{90l}(x-4l)^5 - \frac{ql^2}{2}(x-5l)^2 + 2{,}66x\left(l^2V_A - ql^3\right)$$

$$v_C = \lim_{\substack{x \to 7l \\ x<7l}} v(x) = 0 = \lim_{\substack{x \to 7l \\ x<7l}} \frac{-V_A\frac{x^3}{6} + \frac{qx^4}{24} - \frac{V_B}{6}(x-4l)^3}{EI_z} +$$

$$\frac{-\frac{q}{24}(x-4l)^3 + \frac{q}{90l}(x-4l)^5 - \frac{ql^2}{2}(x-5l)^2 + 2{,}66x\left(l^2V_A - ql^3\right)}{EI_z};$$

$$0=\frac{-V_A\frac{(7l)^3}{6}+\frac{q(7l)^4}{24}-\frac{V_B}{6}(7l-4l)^3}{EI_z}+$$

$$\frac{-\frac{q}{24}(7l-4l)^3+\frac{q}{90l}(7l-4l)^5-\frac{ql^2}{2}(7l-5l)^2+2{,}66.7l\left(l^2V_A-ql^3\right)}{EI_z}$$

$$-38{,}546.V_A-4{,}5V_B+ql.78{,}746=0;(3)$$

$$\begin{cases}\frac{V_A+V_B+V_C=10ql;(1)}{\frac{-4V_B-7V_C=-45ql;(2)}{-38{,}546V_A-4{,}5V_B+78{,}746ql=0;(3)}}\end{cases};$$

$$\begin{cases}\frac{7V_A+7V_B+7V_C=70ql;(1)}{\frac{-4V_B-7V_C=-45ql;(2)}{7V_A+3V_B=25ql}}\end{cases}$$;V_A = 1,47 ql ; V_B = 4,9 ql ;

V_C = 3,63 ql. Acum trebuie să verificăm dacă s-a făcut corect calculul forţelor de reacţiune, verificând ecuaţia de echilibru $\sum M_{iz}=0$; faţă de cel puţin două sau trei puncte, acest lucru se face statistic.

$\sum M_{iz}(N)=0;$ $\quad 1{,}47ql.2l-4{,}9ql.2l+ql^2+6ql.4l-3{,}63ql.5l=0;$
$ql^2(2{,}94-9{,}8+25-18{,}15)=0;$

0 = 0 se verifică .

$\sum M_{iz}(M)=0;$ $\quad 1{,}47ql.6l+4{,}9ql.2l+ql^2-4ql.4l-3{,}63ql.l=0;$
$ql^2(8{,}82-19{,}63+10{,}8)=0;0=0;$ se verifică

.

Rezultă calculul corect al forţelor de reacţiune: V_A = 1,47 ql ;
V_B = 4,9 ql ;V_C = 3,63 ql.

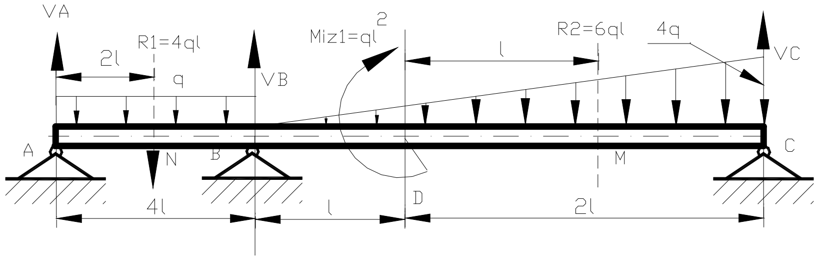


Figura 66

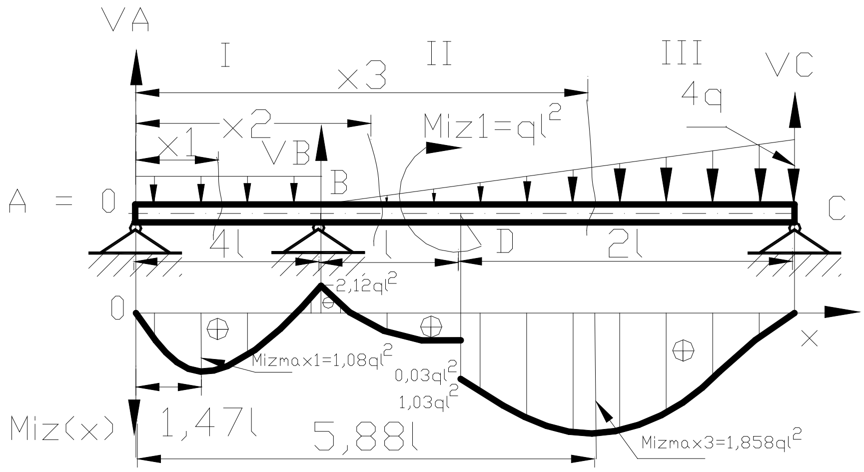


Figura 67

$$M_{iz}(x)=V_A.x-\frac{qx^2}{2}+V_B(x-4l)+\frac{q(x-4l)^2}{2}-\frac{2q(x-4l)^3}{9l}+$$

$$+ql^2(x-5l)^0;$$

se înlocuie V_A şi pe V_B , de unde rezultă:

$$M_{iz}(x)=1{,}47ql.x-\frac{qx^2}{2}+4{,}9ql(x-4l)+\frac{q(x-4l)^2}{2}-$$

$$-\frac{2q(x-4l)^3}{9l}+ql^2(x-5l)^0;$$

expresia momentului generalizator.

Regiunea întâi

$x_1 \in (0;4l); M_{iz}(x_1) = 1{,}47ql.x_1 - \frac{qx_1^2}{2};$

$\lim_{x_1 \downarrow 0} M_{iz}(x_1) = \lim_{x_1 \downarrow 0}\left(1{,}47ql.x_1 - \frac{qx_1^2}{2}\right) = 0;$

$\lim_{x_1 \uparrow 4l} M_{iz}(x_1) = \lim_{x_1 \uparrow 4l}\left(1{,}47ql.x_1 - \frac{qx_1^2}{2}\right) = 1{,}47ql.4l -$;

$-\frac{q(4l)^2}{2} = -2{,}12ql^2$

$\frac{dM_{iz}(x_1)}{dx_1} = 1{,}47ql - qx_1;$

$\frac{dM_{iz}(x_1)}{dx_1} = 1{,}47ql - qx_1 = 0;$ $x_1 = 1{,}47l \in (0;4l)$, fiind un punct de extrem. $\frac{d^2M_{iz}(x_1)}{dx^2_1} = -q < 0;$ concavă şi $x_1 = 1{,}47\ l$, este un punct de maxim, $M_{iz\max} = M_{iz}(1{,}47l) = 1{,}47ql.1{,}47l - \frac{q(1{,}47l)^2}{2} = 1{,}08ql^2;$

Regiunea a II-a

$x_2 \in (4l;5l);$

$M_{iz}(x_2) = 1{,}47ql.x_2 - \frac{qx_2^2}{2} + 4{,}9ql(x_2 - 4l) + \frac{q(x_2 - 4l)^2}{2} -$

$-\frac{2q(x_2 - 4l)^3}{9l}$

$\lim_{x_2 \downarrow 4l} M_{iz}(x_2) = \lim_{x_2 \downarrow 4l}[1{,}47ql.x_2 - \frac{qx_2^2}{2} + 4{,}9ql(x_2 - 4l) +$

$+\frac{q(x_2 - 4l)^2}{2} - \frac{2q(x_2 - 4l)^3}{9l}] = -2{,}12ql^2$

$$\lim_{x_2 \uparrow 5l} M_{iz}(x_2) = \lim_{x_2 \uparrow 5l} [1,47ql.x_2 - \frac{qx_2^{\,2}}{2} + 4,9ql(x_2 - 4l) +$$

$$- \frac{q(x_2 - 4l)^2}{2} - \frac{2q(x_2 - 4l)^3}{9l}] = 0,03ql^2$$

$$M'_{iz}(x_2) = 1,47ql. - qx_2 + 4,9ql + \frac{q(x_2 - 4l)}{} - \frac{2q(x_2 - 4l)^2}{3l};$$

$$M''_{iz}(x_2) = -q + q - \frac{4q(x_2 - 4l)}{3l} < 0;$$

$$M'_{iz}(x_2) = 1,47ql. - qx_2 + 4,9ql + \frac{q(x_2 - 4l)}{} - \frac{2q(x_2 - 4l)^2}{3l} = 0;$$

$$(x_2 - 4l)^2 = \frac{3l^2.2,37}{2};$$

x_{21} = 5,88l ; x_{22} = 2,12l , nu aparţin domeniului maxim de definiţie , deci nu avem puncte de extrem pe această regiune.

Regiunea a III-a

$x_3 \in (5l;7l);$

$$M_{iz}(x_3) = 1,47ql.x_3 - \frac{qx_3^{\,2}}{2} + 4,9ql(x_3 - 4l) + \frac{q(x_3 - 4l)^2}{2} -$$

$$- \frac{2q(x_3 - 4l)^3}{9l} + ql^2(x_3 - 5l)^0$$

$$\lim_{x_3 \uparrow 7l} M_{iz}(x_3) = \lim_{x_3 \uparrow 7l} [1,47ql.x_3 - \frac{qx_3^{\,2}}{2} + 4,9ql(x_3 - 4l) +$$

$$+ \frac{q(x_3 - 4l)^2}{2} - \frac{2q(x_3 - 4l)^3}{9l} + ql^2] = 0$$

$$\lim_{x_3 \downarrow 5l} M_{iz}(x_3) = \lim_{x_3 \downarrow 5l} [1,47ql.x_3 - \frac{qx_3^{\,2}}{2} + 4,9ql(x_3 - 4l) +$$

$$+ \frac{q(x_3 - 4l)^2}{2} - \frac{2q(x_3 - 4l)^3}{9l} + ql^2] = 1,03ql^2$$

$$M'_{iz}(x_3)=1{,}47ql.-qx_3+4{,}9ql+\frac{q(x_3-4l)}{}-\frac{2q(x_3-4l)^2}{3l};$$

$$M''_{iz}(x_3)=-q+q-\frac{4q(x_3-4l)}{3l}<0;$$

$$M'_{iz}(x_3)=1{,}47ql.-qx_3+4{,}9ql+\frac{q(x_3-4l)}{}-\frac{2q(x_3-4l)^2}{3l}=0;$$

$$(x_3-4l)^2=\frac{3l^2.2{,}37}{2};$$

x_{31} = 5,88l ; x_{32} = 2,12l , numai x_{31} = 5,88 l $\in(5l;7l)$ fiin punct de maxim.

$$M_{iz\max}=1{,}47ql.5{,}88l-\frac{q(5{,}88l)^2}{2}+4{,}9ql(5{,}88l-4l)+$$
$$+\frac{q(5{,}88l-4l)^2}{2}-\frac{2q(5{,}88l-4l)^3}{9l}+ql^2(5{,}88l-5l)^0;$$

$M_{iz\max}=1{,}858ql^2$. Caracteristicile geometrice ale secţiunii transversale:

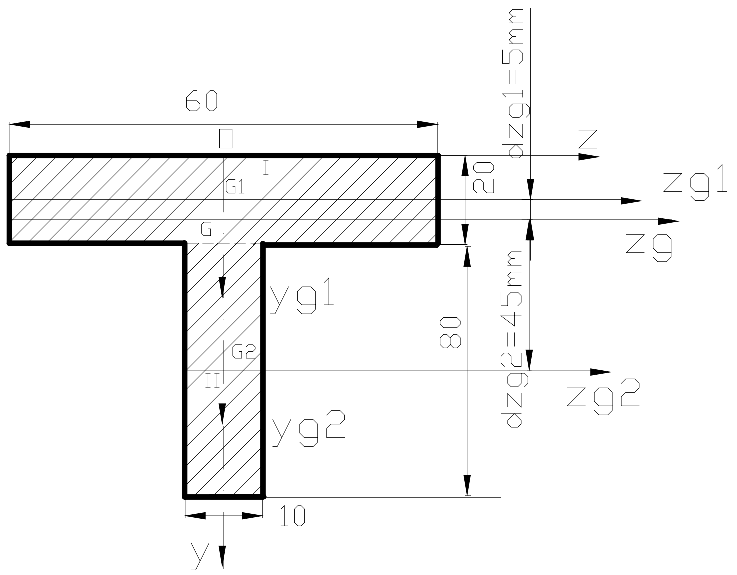


Figura 68

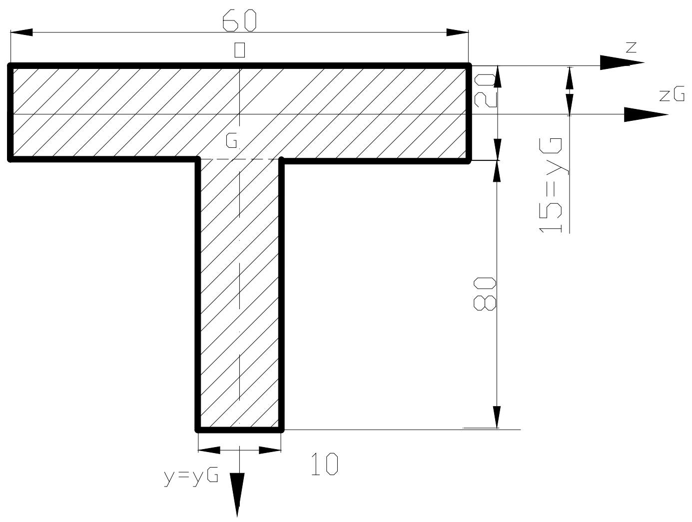


Figura 69

G_1 (0;10); G_1 (z_1;y_1); A_1 = 60.20 =1200 mm^2 ; G_2 (0;60); G_2 (z_2;y_2); A_2 =80.10 =800 mm^2 ;

$$y_G = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{10.1200 + 60.800}{1200 + 800}\frac{mm^3}{mm^2} = 15mm;$$

$$I_z = I_z^I + I_z^{II}; \quad I_z^I = I_{zG1} + A_1.d_{zG1}^2;$$

$$I_z^{II} = I_{zG2} + A_2.d_{zG2}^2;$$

$$I_z^I = I_{zG1} + A_1.d_{zG1}^2 = \left[\frac{20^3.60}{12} + 1200.(15-10)^2\right]mm^4 = 7.10^4\,mm^4$$

;

$$I_z^{II} = I_{zG2} + A_2.d_{zG2}^2 =$$

$$\left[\frac{80^3.10}{12} + 800.(60-15)^2\right]mm^4 = 2046666{,}66mm^4;$$

I_z = 2116666,66 mm^4 .

$$W_{z\min} = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{2116666{,}66mm^4}{85mm} = 24901{,}96mm^3;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{iz\max}}{W_{z\min}};$$ relaţia de verificare.

$$M_{iz\max} = \left| -2{,}12ql^2 \right| = 2{,}12ql^2 = 2{,}12.2{,}8\frac{N}{m}(0{,}53m)^2 = ;$$

$$= 2{,}12.2{,}8.(0{,}53)^2.10^3\,N.mm = 1{,}667422.10^3\,N,mm;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{iz\max}}{W_{z\min}} = \frac{1{,}667422.10^3\,N.mm}{24901{,}96mm^3} = 0{,}066\frac{N}{mm^2} < \sigma_a$$, bara rezistă .

Ridicarea nedeterminării prin teoremele lui Castigliano

Problema nr:3.

Să se dimensioneze bara din figura 70 , ştiind că : q=2,5 $\frac{N}{m}$,

l = 0,29 m şi $\sigma_a = 111\frac{N}{mm^2}$, $\frac{d}{D} = 0{,}8$.

Rezolvare:

$$V_A + V_B + V_D - ql - \frac{16ql}{3} = 0 \quad (1) \quad ; \quad \sum F_y = 0 \quad ; \quad \sum M_{iz\,A} = 0$$

$$ql * l - V_B * 3l + \frac{16ql}{3}(15l) - V_D * 19l = 0 \quad ;$$

$$ql^2 - 3V_B * l + 80ql^2 - 19V_D * l = 0$$

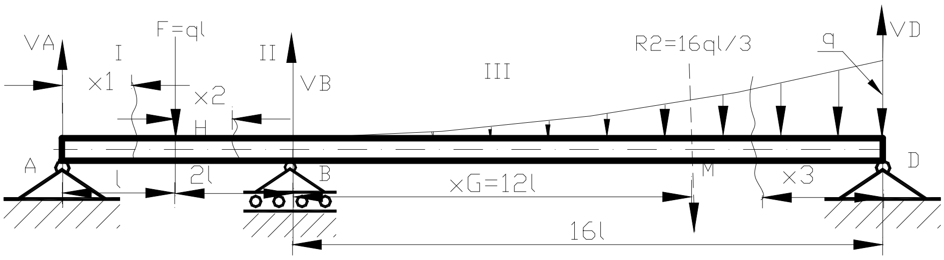


Figura 70

$$\begin{cases} 3V_B + 19V_D = 81ql(2) \\ V_A + V_B + V_D = 6{,}33ql(1) \end{cases} \quad ; \quad 19V_D = 81ql - 3V_B \quad ;$$

$V_D = 4{,}2631ql - 0{,}157895V_B$

$V_A = 6{,}33ql - V_B - 4{,}2631ql + 0{,}1578V_B$;

$V_A = 2{,}066ql - 0{,}8422V_B$;

Problema este simplu static nedeterminată, sunt două ecuaţii şi trei necunoscute : V_A , V_B ,V_D .Am ales ca necunoscută static nedeterminată pe V_B , în mod indirect a dus la explicitarea forţelor de reacţiune V_A şi V_D funcţie de V_B .

Regiu-nea	$M_{iz}(x)$	$\frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial V_B}$	$x \in ...$
întâi	$2{,}066qlx - 0{,}8422xV_B$	-0,8422x	$(0, l)$
a II-a	$2{,}66ql^2 + 1{,}066qlx - 0{,}8422V_B(l + x)$	-0,8422 (l+x)	$(0,2l)$
a III-a	$\frac{-qx^4}{3072l^2} + \frac{qx^3}{48l} - \frac{qx^2}{2} + 4{,}2631qlx - 0{,}1578V_B x$	-0,1578 x	$(0,16l$

Regiunea întâi $x_1 \in (0, l]$

$M_{iz}(x) = V_A x_1 = (2{,}066ql - 0{,}8422V_B)x$

Regiunea a II-a:

$x_2 \in (0{,}2l]$; $M_{iz}(x_2) = V_A(l + x_2) - qlx$;

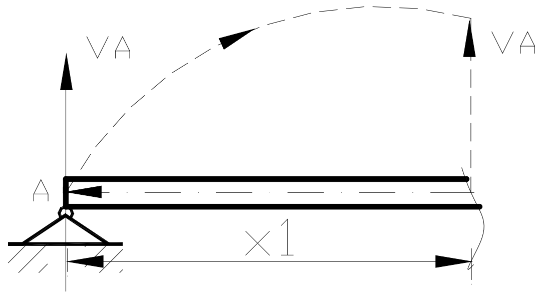


Figura 71

$$M_{iz}(x) = (2{,}066ql - 0{,}8422V_B)(l + x) - qlx = 2{,}066ql^2 - 0{,}8422V_B l +$$

$$2{,}066qlx - 0{,}8422V_B x - qlx \quad ;$$

$$M_{iz}(x) = 2{,}066ql^2 + 1{,}066qlx - 0{,}8422V_B(l + x)$$

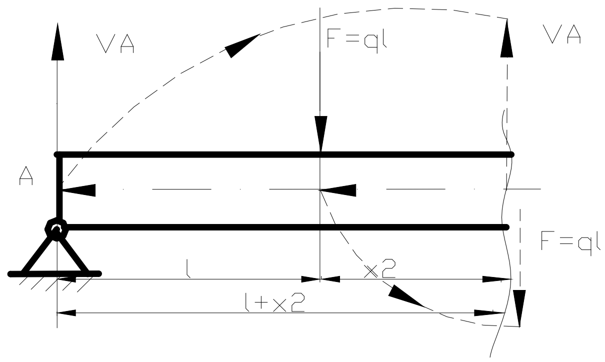


Figura 72 a

Regiunea a III-a : $x_3 \in (0{,}16l)$

$$M_{iz}(x_4) = -\frac{qx^4}{3072l^2} + \frac{qx^3}{48l} - \frac{qx^2}{2} + V_D x \quad ;$$

$$V_D = 4{,}2631ql - 0{,}1578V_B$$

$$0=\frac{\partial L}{\partial V_B}=\sum\int\frac{1}{EI_z}M_{iz}(x)\frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial V_B}dx=v_B \quad ;$$

$$0=\frac{1}{EI_z}\left\{\int_0^l(2{,}066qlx-0{,}84422V_Bx)(-0{,}8422x)dx\right\}+$$

$$\frac{1}{EI_z}\left\{\int_0^{16l}\left[\frac{-qx^4}{3072l^2}+\frac{qx^3}{48l}-\frac{qx^2}{2}+4{,}2631qlx-0{,}1578V_Bx\right](-0{,}1578x)dx\right\}+$$

$$\frac{1}{EI_z}\left\{\int_0^{2l}(2{,}066ql^2+1{,}066qlx-0{,}84422V_B(l+x))[-0{,}8422(l+x)]dx\right\}$$

$$0=-0{,}8422\int_0^l(2{,}066qlx^2-0{,}84422V_Bx^2)dx-$$

$$-0{,}8422\int_0^{2l}\left[2{,}066ql^3+2{,}066ql^2x+1{,}066ql^2x+1{,}066qlx^2\right.$$

$$\left.+0{,}8422^2V_B\int_0^{2l}(l^2+2lx+x^2)\right]dx-$$

$$-0{,}1578\int_0^{16l}\left[\frac{-qx^5}{3072l^2}+\frac{qx^4}{48l}-\frac{qx^3}{2}+4{,}2631qlx^2-0{,}1578V_Bx^2\right]dx$$

V_B = 4,54023.ql ; V_A = -1,7577 ql ; V_D = 3,5463 ql . $\sum M_{iz}=0$; este ecuaţia de echilibru şi este îndeplinită pentru toate punctele din spaţiu sau plan, dar se ia numai punctele de pe bară , pentru că se ştiu braţele forţelor, nu trebuie să se lucreze la o anumită scară pentru a măsura şi braţele forţelor.

Deoarece V_A a dat o valoare negativă , i se schimbă sensul.

$\sum M_{iz}(H)=0;$

$$-1{,}7577ql.l-4{,}54023ql.2l+\frac{16ql}{3}.14l-3{,}5463ql.18l=0\,?? \quad ;$$

$$ql^2(\ -1{,}7577-4{,}54023.2+\frac{16}{3}.14-3{,}5463.18\ )=0;$$

$$ql^2(\ -1{,}7577-9{,}084046+74{,}666-63{,}8334\ )=0;$$

$0=0$ verifică .

$\sum M_{iz}(M)=0$;

$-1{,}7577ql.15.l-ql.14l+4{,}54023ql.12l-3{,}5463ql.4l=0\,??$;

$ql^2(\ -1{,}7577.15.-.14+4{,}54023.12-3{,}5463.4\ )=0$;

$ql^2(\ -26{,}3655-.14+54{,}4827-14{,}1852\ )=0$

$0=0$ verifică .

Regiunea întâi

$x_1\in(0;l)$; $M_{iz}(x_1)=-1{,}7577qlx_1$

$$\lim_{x_1\downarrow 0}M_{iz}(x_1)=\lim_{x_1\downarrow 0}(-1{,}7577qlx_1)=0;$$

$$\lim_{x_1\uparrow l}M_{iz}(x_1)=\lim_{x_1\uparrow l}(-1{,}7577qlx_1)=-1{,}7577ql^2;$$

Regiunea a II-a

$x_2\in(l;3l]$;

$M_{iz}(x_2)=-1{,}7577qlx_2-ql(x_2-l)$;

$$\lim_{x_2\downarrow l}M_{iz}(x_2)=\lim_{x_2\downarrow l}[\ -1{,}7577qlx_2-ql(x_2-l)\ ]=-1{,}7577ql^2$$

$$\lim_{x_2\uparrow 3l}M_{iz}(x_2)=\lim_{x_2\uparrow 3l}[\ -1{,}7577qlx_2-ql(x_2-l)\ ]=-7{,}2731ql^2$$

;

Regiunea a III-a

$x_3\in(0;16l)$;

$$M_{iz}(x_3)=-\frac{qx_3^4}{3072l^2}+\frac{qx_3^3}{48l}-\frac{qx_3^2}{2}+3{,}5463qlx_3;$$

$$\lim_{x_3\downarrow 0}M_{iz}(x_3)=\lim_{x_3\downarrow 0}[-\frac{qx_3^4}{3072l^2}+\frac{qx_3^3}{48l}-\frac{qx_3^2}{2}+3{,}5463qlx_3]=0$$

$$\lim_{x_3 \uparrow 16l} M_{iz}(x_3) = \lim_{x_3 \uparrow 16l}\left[-\frac{qx_3^4}{3072l^2} + \frac{qx_3^3}{48l} - \frac{qx_3^2}{2} + 3{,}5463qlx_3 \right]$$

$= -7{,}2731ql^2;$

$$M'_{iz}(x_3) = -\frac{qx_3^3}{768l^2} + \frac{qx_3^2}{16l} - \frac{qx_3}{} + 3{,}5463ql \qquad ;$$

$$M''_{iz}(x_3) = -\frac{qx_3^2}{256l^2} + \frac{qx_3}{8l} - q\,;$$

$$M''_{iz}(x_3) = -\frac{qx_3^2}{256l^2} + \frac{qx_3}{8l} - q = 0 \;; \quad (x_3 - 16l)^2 = 0 \;;$$ funcţia este concavă.

$$M'_{iz}(x_3) = -\frac{qx_3^3}{768l^2} + \frac{qx_3^2}{16l} - \frac{qx_3}{} + 3{,}5463ql = 0 \qquad ;$$

$$x_3^3 - 48lx_3^2 + 768l^2x_3 - 2723{,}5584l^3 = 0 \;;$$

x3	4,885l	4,887l	4,9l
$x_3^3 - 48lx_3^2 + 768l^2x_3 - 2723{,}5584l^3$	-0,74l^3	-0,003l^3	4,811l^3

x = 4,887 l este punct de extrem .

$M_{iz\,max}$ = M(4,887 l) = $ql^2 \left[-\frac{4{,}887^4}{3072} + \frac{4{,}887^3}{48} - \frac{4{,}887^2}{2} + 3{,}5463 * 4{,}887 \right]$

$M_{iz\,max}$ = 7,635ql^2

$$M_{iz\max} = \left|7{,}635ql^2\right| = 7{,}635ql^2 = 7{,}635.2{,}5\frac{N}{m}(0{,}29m)^2 =$$

$$= 7{,}635.2{,}5.(0{,}29)^2.10^3\,N.mm = 1{,}605.10^3\,N.mm.$$

Relaţia de dimensionare : $W_{znec} = \dfrac{M_{iz\max}}{\sigma_a} = \dfrac{1{,}605.10^3\,N.mm}{111\dfrac{N}{mm^2}} = 14{,}459mm^3;$

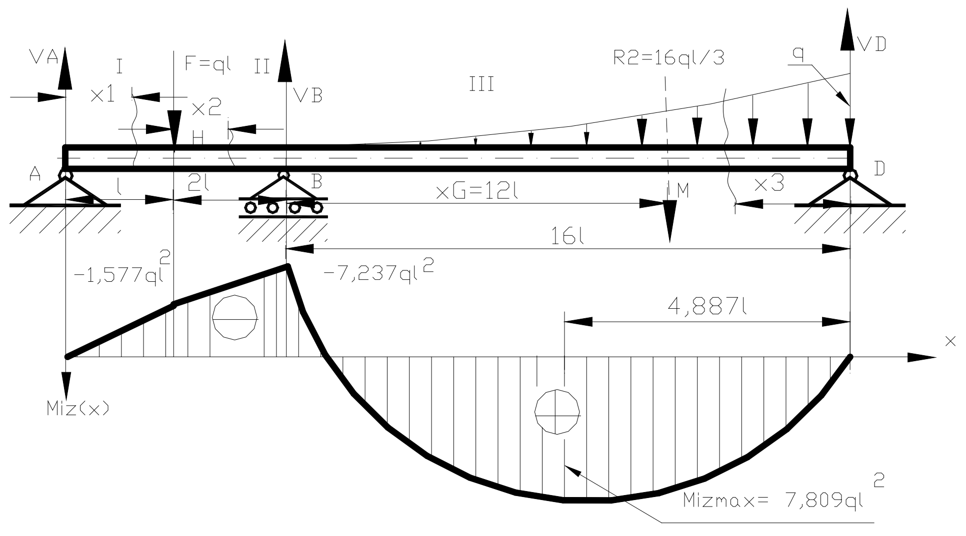


Figura 72 b

$$W_z = \frac{\pi}{32D}\left(D^4 - d^4\right) = \frac{\pi D^3}{32}\left(1 - 0{,}8^4\right) = 0{,}057933D^3 = 14{,}459mm^3;$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{14{,}459mm^3}{0{,}057933}} = 6{,}18mm \approx 7mm;$$

d = 4,2 mm , dar pentru a da valori întregi , se adoptă D = 10 mm şi d = 8 mm.

6.20. Ecuaţia celor trei momente (ecuaţia lui Clapeyron)

Dacă o bară are un număr mai mare de reazeme, numită şi grindă continuă, pentru ea există o metodă proprie de rezolvare, numită ecuaţia celor trei momente, dacă bara ar avea (j) reazeme simple , statica ne oferă numai două ecuaţii de echilibru ($\sum F_y = 0$ şi $\sum M_{iz} = 0$) deci bara va fi de (j-2) ori static nedeterminată . Dacă există forţe exterioare înclinate active, atunci în mod obligatoriu trebuie să avem din cele (j) reazeme şi o articulaţie fixă care să echilibreze rezultanta pe orizontală a forţelor înclinate active. În cazul în care avem o bară cu două reazeme ca în figura 74 , momentele încovoietoare în punctele A_i şi A_{i+1} , sunt egale cu zero.

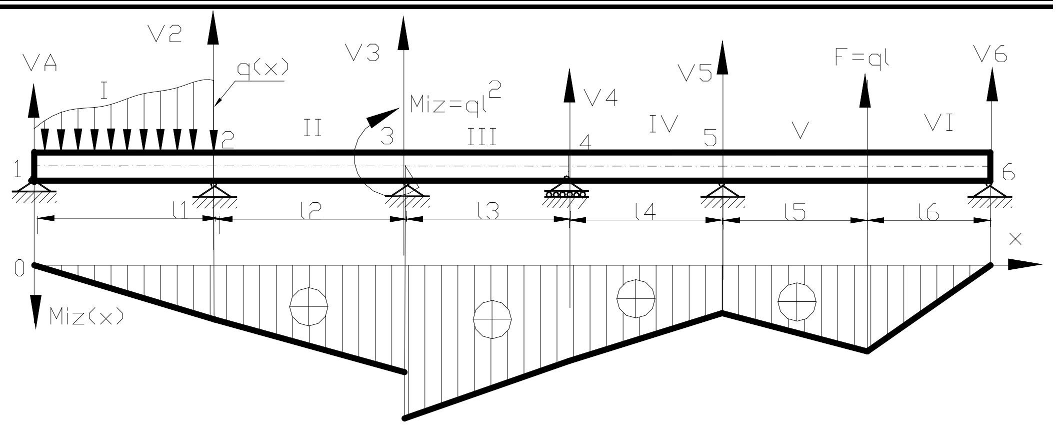


Figura 73

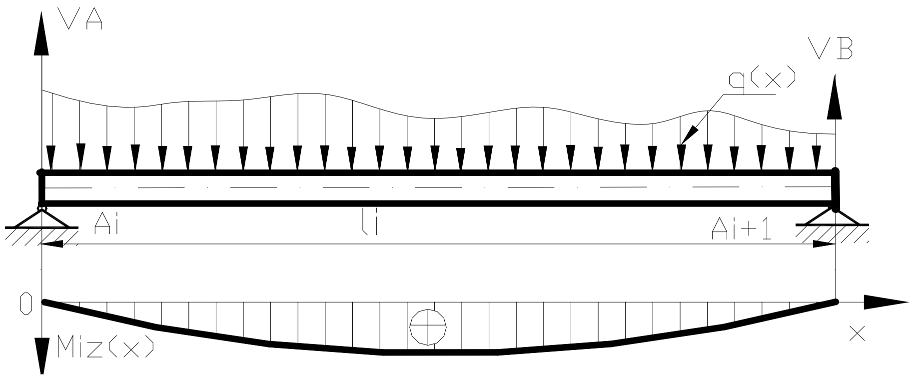


Figura 74

Cazul II

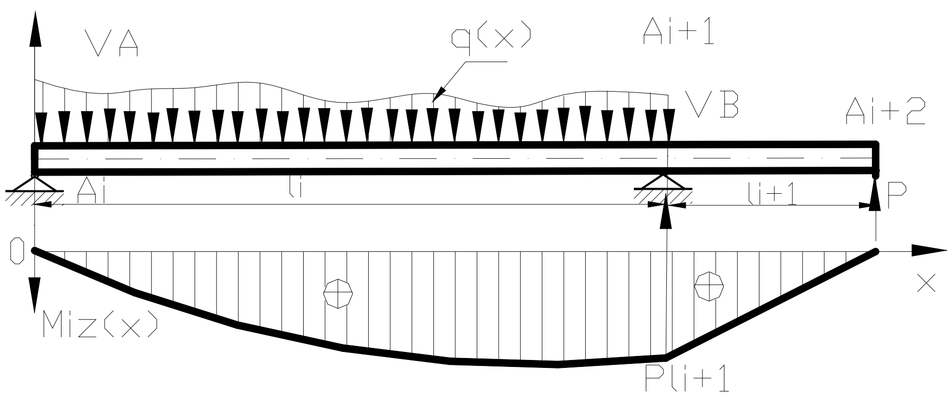


Figura 75

din figura 75, M_{iz} (A_i) = 0 ; Miz (A_{i+1}) = P . l_{i+1} , pentru că există consola A_{i+1} A_{i+2} .Din figura 76, Miz (A_{i+1}) = F_2 . l_{i+1} ; M_{iz} (A_i) = F_1 . l_{i-1} .

Deci rezultă că în figura (73) iniţială avem momente încovoietoare în reazemele 2,3,4 iar în reazemele extreme (1, 6) momentele încovoietoare sunt egale cu zero, menţionăm că studiem momentele încovoietoare de pe axa OZ (nu de pe axa OY) . Studiind o bară cu (j) reazeme , sistemul este static nedeterminat de (j – 2) ori , în acest caz există momente încovoietoare în reazemele : 2,3 …n-1,n…j-1 ,iar la capete , adică , în reazemele (1) şi (j) momentele încovoietoare sunt egale cu zero [M_{iz}(1) = 0 ,M_{iz}(j)=0].

Cazul III din figura 77

Atunci când se cunosc forţele de reacţiune : V_1 , V_2 …V_j , momentele pe reazeme, M_2 , M_3…M_{j-1} se pot calcula.

Şi invers , dacă se cunosc momentele încovoietoare din reazemele 2,3 …n-1,n…j-1 , se pot calcula forţele de reacţiune : V_1 , V_2 …$V_{j,}$ acum se iau ca necunoscute static nedeterminate momentele încovoietoare din reazemele 2, 3 …n-1, n…j-1.

Din condiţia de derivabilitate a funcţiei fibrei medii deformate , rezultă câte o ecuaţie de deformaţii pentru fiecare reazem intermediar, se ia două deschideri succesive ale barei, limitate de reazemele n-1, n, n+1 din figura 78.

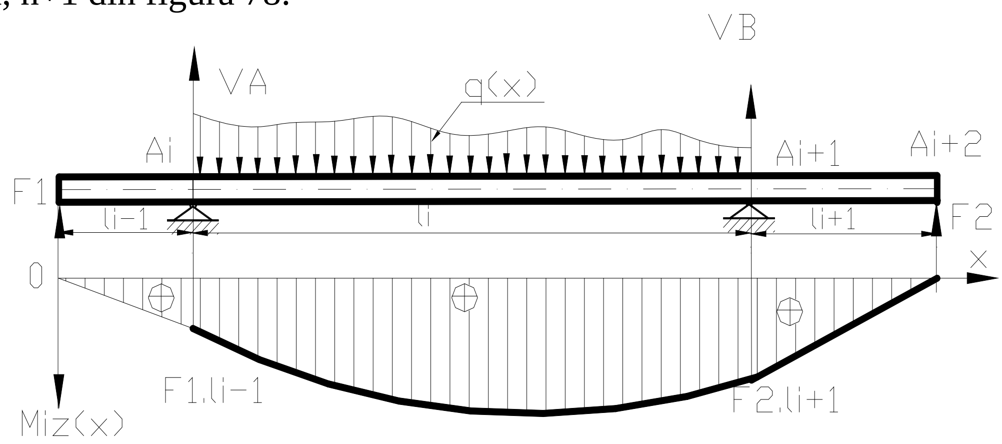


Figura 76

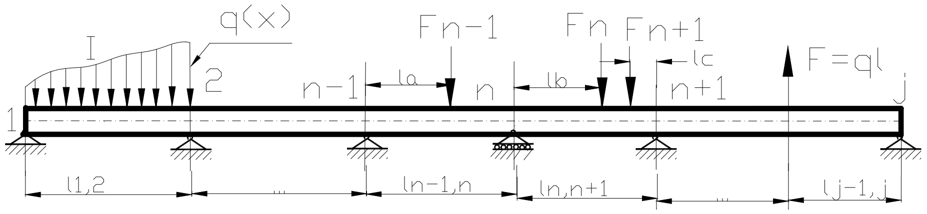


Figura 77

Această grindă din figura 78 fiind un tronson de grindă din figura 77 se poate descompune în grinzi simplu rezemate la capete, ca în figura 79, încărcate cu încărcătura lor provenită din forţele exterioare, F_{n-1} , F_n , F_{n+1} şi pe de altă parte cu câte un cuplu (moment încovoietor) pe fiecare reazem.

Grinzile izolate (n-1, n) şi (n, n+1) sunt simplu static nedeterminate şi se ridică nedeterminarea cum s-a mai menţionat din condiţia de derivabilitate a funcţiei fibrei medii deformate .

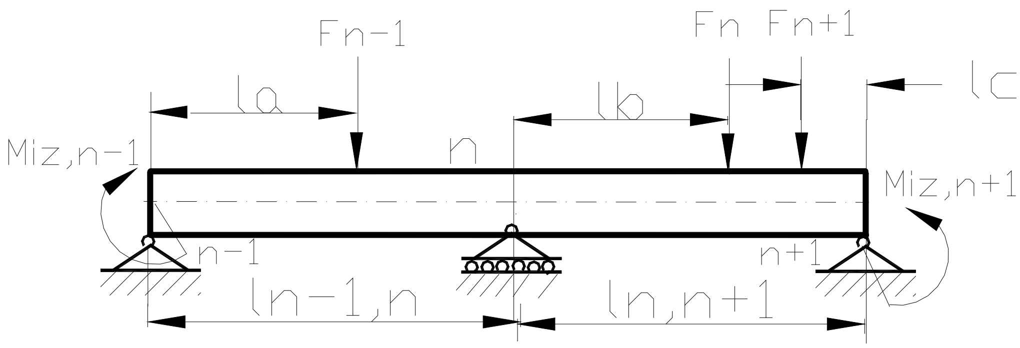


Figura 78

Funcţia fibrei medii deformate trebuie să fie continuă şi derivabilă pe tot domeniul maxim de definiţie .

Pentru trasarea diagramelor de momente încovoietoare se aplică principiul suprapunerii efectelor, forţele exterioare dau anumite momente încovoietoare notate cu M_s.

Acestora li se adaugă triunghiurile date de momentele încovoietoare din reazeme: $M_{iz}(n-1)$, $M_{iz}(n)$, M_{iz} (n+1).

Din figura 81 se vede că : $x \in \left(o; l_{n-1,n}\right)$;

$V_{n-1}'' + V_n'' = 0$; $\sum M_{iz}(n-1) = 0$; $M_{iz,n-1} - V_n''.l_{n-1,n} = 0$;

$V_n'' = \dfrac{M_{iz,n-1}}{l_{n,n-1}}$; la fel şi pentru

$V_{n-1}'' = -\dfrac{M_{iz,n-1}}{l_{n,n-1}}$; $M_{iz}(x) = \dfrac{-M_{iz,n-1}}{l_{n,n-1}}x + M_{iz,n-1}$

$$\lim_{x \downarrow 0} M_{iz}(x) = \lim_{x \downarrow 0} \left[\frac{-M_{iz,n-1}}{l_{n,n-1}}x + M_{iz,n-1} \right] = M_{iz,n-1}$$

$$\lim_{x \uparrow l_{n-1,n}} M_{iz}(x) = \lim_{x \uparrow l_{n-1,n}} \left[\frac{-M_{iz,n-1}}{l_{n,n-1}}x + M_{iz,n-1} \right] =$$
$$= \left[-M_{iz,n-1} + M_{iz,n-1} \right] = 0$$

Din figura 80 rezultă: $x \in (o; l_{n-1,n})$; $V_{n-1}' + V_n' = F_{n-1}$; ecuaţia de verificare, şi din $\sum M_{iz}(n-1) = 0$; $-V_n' l_{n-1,n} + F_{n-1} l_a = 0; V_n' = \dfrac{F_{n-1} l_a}{l_{n-1,n}}$

din $\sum M_{iz}(n) = 0$; $V_{n-1}' l_{n-1,n} - F_{n-1}(l_{n-1,n} - l_a) = 0; V_{n-1}' = \dfrac{F_{n-1}(l_{n-1,n} - l_a)}{l_{n-1,n}}$

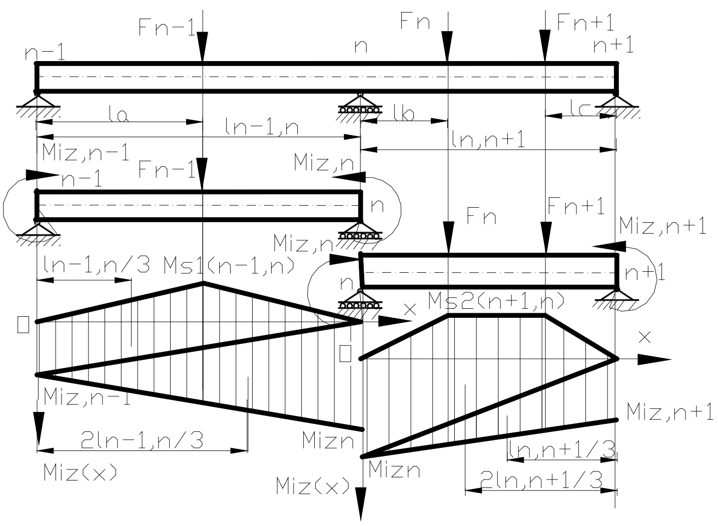


Figura 79

Regiunea întâi : $x_1 \in (0; l_a)$; $M_{iz}(x_1) = V'_{n-1}.x_1$

$\lim\limits_{x_1 \downarrow 0} M_{iz}(x_1) = 0$; $\lim\limits_{x_1 \uparrow l_a} M_{iz}(x_1) = V'_{n-1} l_a = M_{s1}(n-1, n)$.

Regiunea a II-a: $x_2 \in (0; l_{n-1,n} - l_a)$; $M_{iz}(x_2) = V'_n.x_2$

$\lim\limits_{x_2 \downarrow 0} M_{iz}(x_2) = 0$; $\lim\limits_{x_{21} \uparrow l_{n-1,n} - l_a} M_{iz}(x_2) = M_{s1}(n-1, n)$.

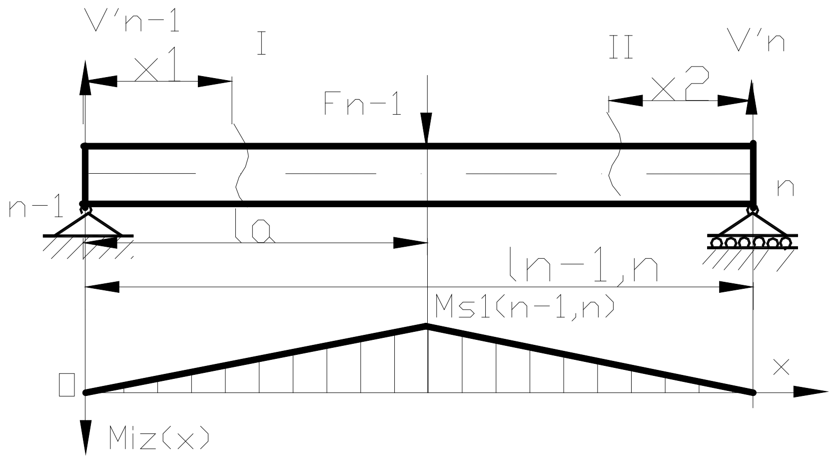


Figura 80

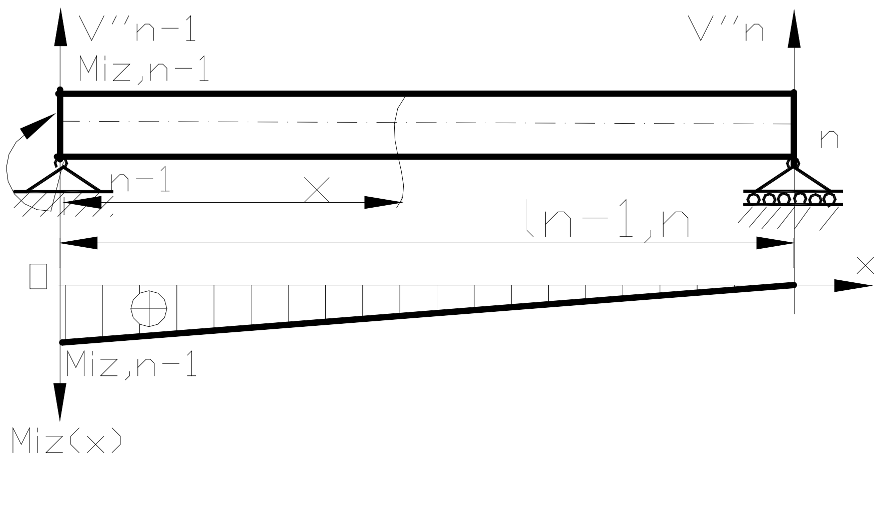


Figura 81

Din figura 82 rezultă:

$x \in (o; l_{n-1,n})$; $V'''_{n-1} + V'''_n = 0$; $\sum M_{iz}(n-1) = 0$;

$-M_{iz,n} - V'''_n . l_{n-1,n} = 0$; $V'''_n = -\dfrac{M_{iz,n}}{l_{n,n-1}}$; la fel şi pentru

$V'''_{n-1} = \dfrac{M_{iz,n}}{l_{n,n-1}}$; $M_{iz}(x) = \dfrac{M_{iz,n}}{l_{n,n-1}} x$;

$\dfrac{\lim}{x \downarrow 0} M_{iz}(x) = \dfrac{\lim}{x \downarrow 0} [\ \dfrac{M_{iz,n}}{l_{n,n-1}} x\ ] = 0$;

$\dfrac{\lim}{x \uparrow l_{n-1,n}} M_{iz}(x) = \dfrac{\lim}{x \uparrow l_{n-1,n}} [\ \dfrac{M_{iz,n}}{l_{n,n-1}} x] = M_{iz,n}$.

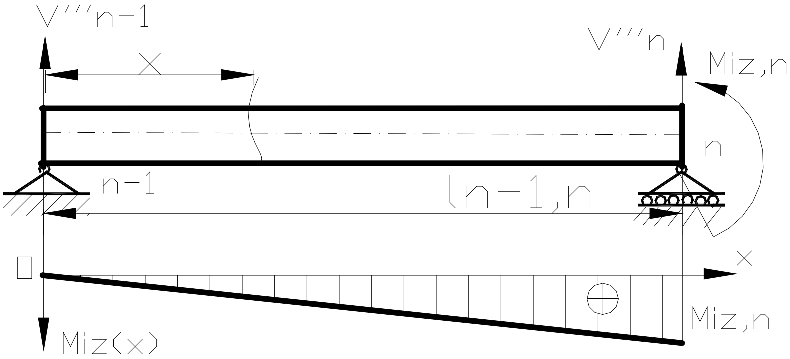


Figura 82

Acum se însumează efectele produse de forţa F_{n-1} şi momentele încovoietoare $M_{iz,n}$, $M_{iz,n-1}$, se pun pe o singură diagramă conform principiului suprapunerii efectelor ca în figura 79, la fel se procedează şi cu tronsonul (n, n+1) . **Din figura 83 b cu** $x \in (o; l_{n+1,n})$;

$V'_{n+1} + V'_n = 0$; $\sum M_{iz}(n+1) = 0$; $M_{iz,n} + V'_n . l_{n+1,n} = 0$;

$V'_n = -\dfrac{M_{iz,n}}{l_{n,n+1}}$; la fel şi pentru $V'_{n+1} = \dfrac{M_{iz,n}}{l_{n,n+1}}$;

$M_{iz}(x) = \frac{M_{iz,n}}{l_{n,n+1}} x$; $\lim\limits_{x \downarrow 0} M_{iz}(x) = \lim\limits_{x \downarrow 0} [\ \frac{M_{iz,n}}{l_{n,n+1}} x\ ] = 0$

$\lim\limits_{x \uparrow l_{n,n+1}} M_{iz}(x) = \lim\limits_{x \uparrow l_{n,n+1}} [\ \frac{M_{iz,n}}{l_{n,n+1}} x\ ] = M_{iz,n}$; apoi se trasează din figura 83 a diagrama de momente încovoietoare M_{s2}(n,n+1) .

Din figura 84 cu : $x \in (o; l_{n+1,n})$

$V_{n-1}^{IV} + V_n^{IV} = 0$; $\sum M_{iz}(n) = 0$; $M_{iz,n+1} + V_{n+1}^{IV}.l_{n+1,n} = 0$

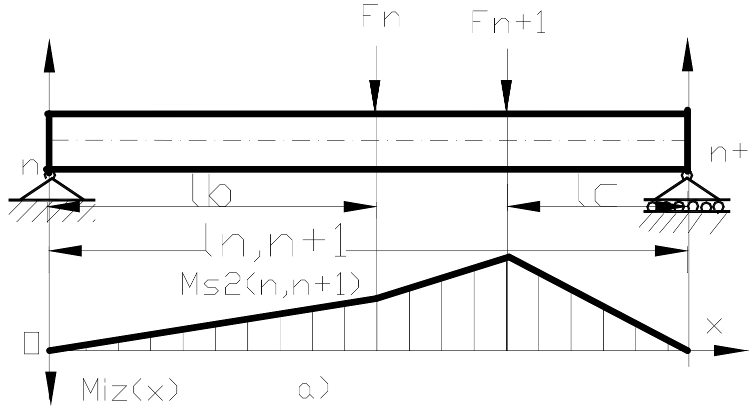


Figura 83 a

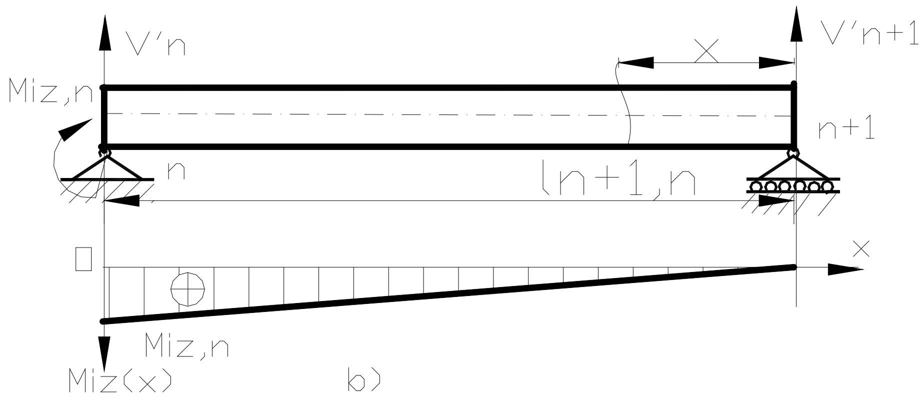


Figura 83 b

$V_{n+1}^{IV} = -\frac{M_{iz,n+1}}{l_{n,n+1}}$;la fel şi pentru

$V_n^{IV} = \frac{M_{iz,n+1}}{l_{n,n+1}}$; $M_{iz}(x) = \frac{M_{iz,n+1}}{l_{n,n+1}} x$;

$\lim_{x \downarrow 0} M_{iz}(x) = \lim_{x \downarrow 0} [\ \frac{M_{iz,n+1}}{l_{n,n+1}} x\ ] = 0$;

$\lim_{x \uparrow l_{n,n+1}} M_{iz}(x) = \lim_{x \uparrow l_{n,n+1}} [\ \frac{M_{iz,n+1}}{l_{n,n+1}} x\ ] = M_{iz,n+1}$.

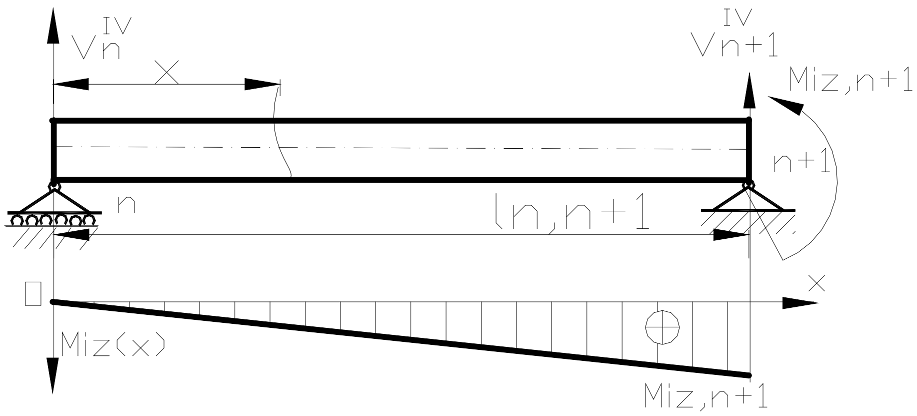


Figura 84

Fie grinda (n-1, n , n+1) din figura 79 , aplicăm metoda grafo-analitică , cu menţiunea că originea este în reazemul (n) , adică în cel din mijloc, φ_n^s fiind unghiul de rotire al secţiunii transversale din stânga reazemului (n) datorită sarcinilor de pe grinda (n-1 , n) , φ_n^d fiind unghiul de rotire al secţiunii transversale din dreapta reazemului (n) , datorită sarcinilor de pe grinda (n , n+1).

$\varphi_n^s = -\varphi_n^d$ (când se schimbă sensul axei OX , atunci se schimbă şi semnul derivatei întâi)

$$\varphi_0 = \frac{[v(x) - v_0]}{x} + \frac{S_{ox}}{x * EI_z} \quad ; \quad O = n \text{ , originea .}$$

$$\varphi_n^s = \frac{[v_{n-1}(x) - v_n(x)]}{l_{n-1,n}} + \frac{S_{n,n-1}}{l_{n-1} * E_{n-1,n} I_{n-1,n}};$$

$$\varphi_n^s = \frac{[v_{n-1}(x) - v_n(x)]}{l_{n-1,n}} + \frac{s_{n,n-1}}{l_{n-1} * E_{n-1,n} I_{n-1,n}} +$$

$$+ \frac{1}{l_{n-1,n} E_{n-1,n} I_{n-1,n}} \left[\frac{M_{iz,n-1}\ l_{n-1,n}}{2} * \frac{l_{n-1,n}}{3} + \frac{M_{iz,n} * l_{n-1,n}}{2} ** \frac{2}{3} l_{n-1,n} \right]$$

Pentru $S_{n,n-1}$ avem contribuţia momentelor încovoietoare $M_{iz,s}$ şi a triunghiurilor date de momentele încovoietoare $M_{iz,n}$, $M_{iz,n-1}$.

$$S_{n,n-1} \frac{1}{l_{n-1,n} E_{n-1,n} I_{n-1,n}} = \frac{s_{n,n-1}}{l_{n-1} * E_{n-1,n} I_{n-1,n}} +$$

$$+ \frac{1}{l_{n-1,n} E_{n-1,n} I_{n-1,n}} \left[\frac{M_{iz,n-1}\ l_{n-1,n}}{2} * \frac{l_{n-1,n}}{3} + \frac{M_{iz,n} * l_{n-1,n}}{2} ** \frac{2}{3} l_{n-1,n} \right]$$

$\dfrac{s_{n,n-1}}{l_{n-1} * E_{n-1,n} I_{n-1,n}}$ este dat de $M_{iz,s}$. În mod analog se procedează şi pentru calculul φ_n^d .

$$\varphi_n^d = \frac{[v_{n+1}(x) - v_n(x)]}{l_{n+1,n}} + \frac{S_{n,n+1}}{l_{n+1} * E_{n+1,n} I_{n+1,n}};$$

$$\varphi_n^d = \frac{[v_{n+1}(x) - v_n(x)]}{l_{n+1,n}} + \frac{s_{n,n+1}}{l_{n+1} * E_{n+1,n} I_{n+1,n}} +$$

$$+ \frac{1}{l_{n+1,n} E_{n+1,n} I_{n+1,n}} \left[\frac{M_{iz,n+1}\ l_{n+1,n}}{2} * \frac{l_{n+1,n}}{3} + \frac{M_{iz,n} * l_{n+1,n}}{2} * \frac{2}{3} l_{n+1,n} \right]$$

din $\varphi_n^s = -\varphi_n^d$; $\varphi_n^s + \varphi_n^d = 0$;

$$\frac{\left[v_{n-1}(x)-v_n(x)\right]}{l_{n-1,n}}+\frac{s_{n,n-1}}{l_{n-1}*E_{n-1,n}I_{n-1,n}}+$$

$$+\frac{1}{l_{n-1,n}E_{n-1,n}I_{n-1,n}}\left[\frac{M_{iz,n-1}\;l_{n-1,n}}{2}*\frac{l_{n-1,n}}{3}\right]+$$

$$\frac{\left[v_{n-1}(x)-v_n(x)\right]}{l_{n-1,n}}+\frac{s_{n,n-1}}{l_{n-1}*E_{n-1,n}I_{n-1,n}}+$$

$$+\frac{1}{l_{n-1,n}E_{n-1,n}I_{n-1,n}}\left[\frac{M_{iz,n-1}\;l_{n-1,n}}{2}*\frac{l_{n-1,n}}{3}+\frac{M_{iz,n}*l_{n-1,n}}{2}**\frac{2}{3}l_{n-1,n}\right]+$$

$$+\frac{1}{l_{n-1,n}E_{n-1,n}I_{n-1,n}}\frac{M_{iz,n}*l_{n-1,n}}{2}\frac{2}{3}*l_{n-1,n}$$

În cazul în care există : $E_{n-1,n} = E_{n+1,n} = E$ şi $I_{n-1,n} = I_{n+1,n} = I_z$ se obţine relaţia ,

$$M_{iz,n-1}*\frac{l_{n-1,n}}{6}+\frac{2M_{iz,n}*l_{n-1,n}}{6}+\frac{s_{n,n-1}}{l_{n-1,n}}+$$

$$+EI_z\left[\frac{v_{n-1}(x)-v_n(x)}{l_{n-1,n}}+\frac{v_{n+1}(x)-v_n(x)}{l_{n+1,n}}\right]+M_{iz,n+1}*\frac{l_{n,n+1}}{6}+$$

$$+2.M_{iz,n}*\frac{l_{n,n+1}}{6}+\frac{s_{n,n+1}}{l_{n,.n+1}}=0$$

$$M_{iz,n-1}.l_{n-1,n}+2.M_{iz,n}\left[l_{n-1,n}+l_{n,n+1}\right]+M_{iz,n+1}.l_{n,n+1}+$$

$$+6EI_z\left[\frac{v_{n-1}(x)-v_n(x)}{l_{n-1,n}}+\frac{v_{n+1}(x)-v_n(x)}{l_{n+1,n}}\right]=-6\left[\frac{s_{n,n-1}}{l_{n-1,n}}+\frac{s_{n,n+1}}{l_{n,n+1}}\right]$$

aceasta este **ecuaţia celor trei momente sau ecuaţia lui Clapeyron**. În cazul în care reazemele sunt rigide [$v_{n-1}(x) = v_n(x) = v_{n+1}(x) = 0$] şi grinda continuă este de secţiune constantă , atunci se obţine :

$$M_{iz,n-1}.l_{n-1,n}+2.M_{iz,n}\left[l_{n-1,n}+l_{n,n+1}\right]+M_{iz,n+1}.l_{n,n+1}=$$

$$=-6\left[\frac{s_{n,n-1}}{l_{n-1,n}}+\frac{s_{n,n+1}}{l_{n,n+1}}\right]$$

, ecuaţia calor trei momente pentru cazul particular , iar $s_{n,n-1}$ şi $s_{n,n+1}$ sunt momentele

statice ale suprafeţelor diagramelor de momente încovoietoare la grinzile simplu rezemate în raport cu reazemele (n-1) respectiv (n+1).

Problema nr.4

Să se verifice bara din figura 85 , ştiind că : q = 1,3 N/m ;

l = 0,285 m ; $\sigma_a = 117 \frac{N}{mm^2}$.

Secţiunea transversală a barei fiind cea din figura 86.

$R = \int_0^{2l} q(x)dx = \int_0^{2l} q.\sin\frac{\pi.x}{2l}dx = q\int_0^{2l}\sin\frac{\pi.x}{2l}dx;$ se face schimbarea de variabilă , $\frac{\pi.x}{2l} = t$; se diferenţiază ,

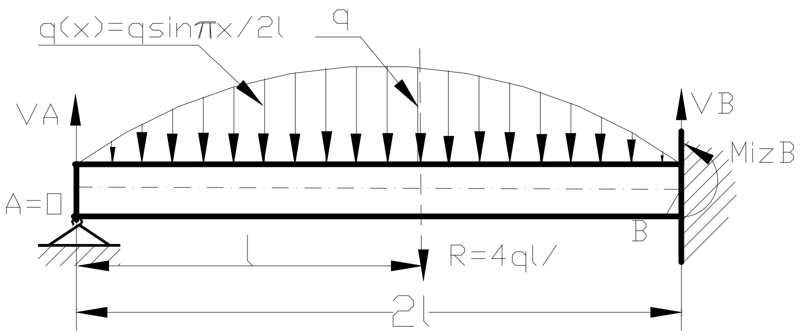


Figura 85

$d\left(\frac{\pi.x}{2l}\right) = dt$; $\frac{\pi.}{2l}dx = dt;$ $dx = \frac{2l}{\pi}dt;$ $t_1 = \frac{\pi.0}{2l} = 0$;

$t_2 = \frac{\pi.2l}{2l} = \pi$;

$\cos\pi = -1; \cos 0 = 1;$

$$R = q\int_0^{2l}\sin\frac{\pi.x}{2l}dx = q\int_0^{\pi}\frac{2l}{\pi}\sin t.dt = -\frac{2ql}{\pi}.\cos t\Big|_0^{\pi} = -\frac{2ql}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{4ql}{\pi}$$

Punem condiţiile de echilibru ale barei:

$\sum F_y = 0; V_A - \frac{4ql}{\pi} + V_B = 0$;

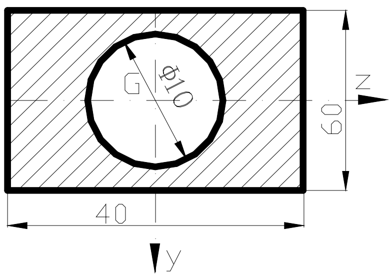


Figura 86

$\sum M_{iz,A} = 0; \frac{4ql}{\pi}.l - V_B.2l - M_{iz}(B) = 0$; există două ecuaţii şi trei necunoscute [V_A , V_B , M_{iz} (B)], sistemul este simplu static nedeterminat, se ridică nedeterminarea cu ajutorul ecuaţiei lui **Clapeyron**.

Reazemul încastrat din punctul (B) , la această metodă se descompune în două reazeme articulate aflate la distanţa ε (ε este un număr pozitiv foarte aproape de zero) , pentru că ecuaţia lui Clapeyron se aplică la trei reazeme articulate consecutive (acest lucru reiese din demonstraţia teoremei). Aplicăm ecuaţia celor trei momente pentru reazemele articulate din punctele : A – B – B' , fiind

$$M_{iz}(A).2l + 2M_{iz}(B)[2l + \varepsilon\ ] + M_{iz}(B') = -6\left[\frac{S_{BA}}{2l} + \frac{S_{BB'}}{\varepsilon}\ \right]$$

$$M_{iz}(A) = 0; M_{iz}(B') = 0; S_{BB'} = 0; 4l.M_{iz}(B) = -6\frac{S_{BA}}{2l}; M_{iz}(B) = -\frac{3}{4}.\frac{S_{BA}}{l^2}$$

; $q(x) = q\sin\frac{\pi x}{2l}$; $\frac{dT(x)}{dx} = -q(x)$;

$dT(x) = -q(x)dx; \int dT(x) = -\int q(x)dx; T(x) = -\int q\sin\frac{\pi x}{2l}dx = -q\int \sin\frac{\pi x}{2l}dx$; se face schimbarea de variabilă , $\frac{\pi.x}{2l} = t$; se diferenţiază ,

$$d\left(\frac{\pi.x}{2l}\right)=dt;\qquad \frac{\pi.}{2l}dx=dt;\qquad dx=\frac{2l}{\pi}dt;$$

$$T(x)=-q\int\sin\frac{\pi.x}{2l}dx=-q\int\frac{2l}{\pi}\sin t.dt=\frac{2ql}{\pi}.\cos t+C=\frac{2ql}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2l}+C;$$

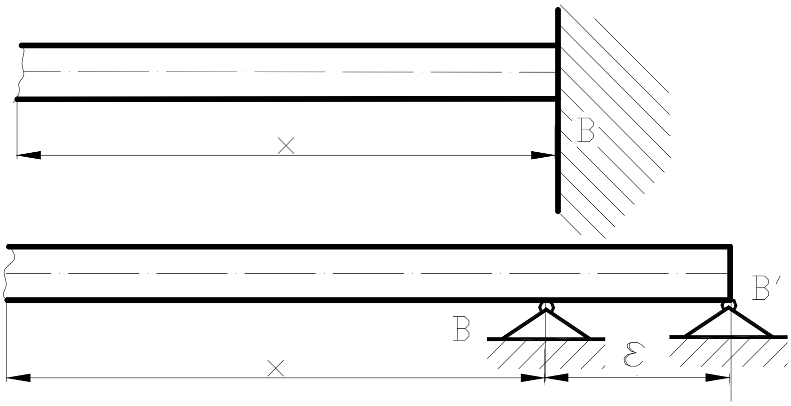


Figura 87

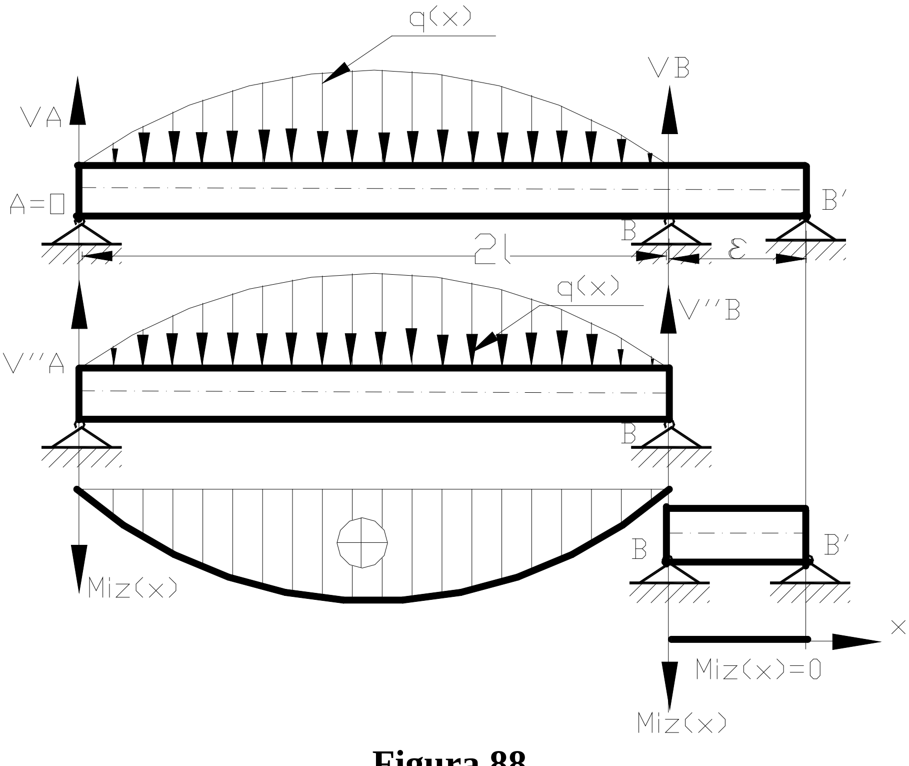


Figura 88

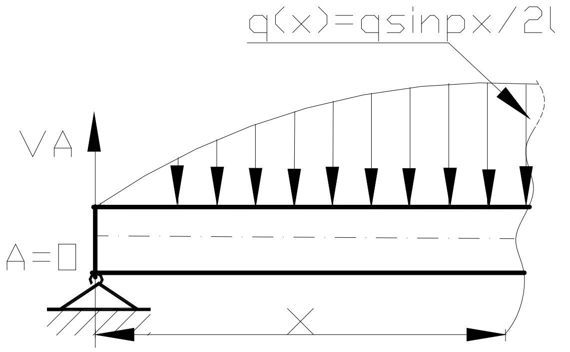


Figura 89

$$\lim_{x\downarrow 0} T(x)=V_A^{''}=\frac{2ql}{\pi}\cos 0+C;\ V_A^{''}=\frac{2ql}{\pi}\cos 0+C; C=V_A^{''}-\frac{2ql}{\pi}\ ;$$

$$T(x)=\frac{2ql}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2l}-\frac{2ql}{\pi}+V_A^{''}\ ;\quad \frac{dM_{iz}(x)}{dx}=T(x); dM_{iz}(x)=T(x)dx;$$

$$\int dM_{iz}(x)=\int T(x)dx;=M_{iz}(x)\ ;$$

$$M_{iz}(x)=\int\left\{\frac{2ql}{\pi}\left[\cos\frac{\pi x}{2l}-1\right]+V_A^{''}\right\}dx=\frac{2ql}{\pi}\int\left(\cos\frac{\pi x}{2l}-1\right)dx+x.V_A^{''}+D$$

dar , $\int\cos\frac{\pi x}{2l}dx=\frac{2l}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2l}+D$;

$$M_{iz}(x)=\frac{2ql}{\pi}\left[\frac{2l}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2l}-x\right]+x.V_A^{''}+D\ ;\quad \lim_{x\downarrow 0} M_{iz}(x)=0=D\ ;$$

$$M_{iz}(x)=\frac{2ql}{\pi}\left[\frac{2l}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2l}-x\right]+x.V_A^{''};$$

$$S_{BA}=\int_0^{2l} xM_{iz}(x)dx=\frac{4ql^2}{\pi^2}\int_0^{2l} x\sin\frac{\pi x}{2l}dx-\frac{2ql}{\pi}\int_0^{2l} x^2dx+V_A^{''}\int_0^{2l} x^2dx\ ;$$

$\int x.\sin\frac{\pi x}{2l}dx$, se integrează prin părţi.

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x).g(x)-\int g(x)f'(x)dx;\quad f(x)=x;\ f'(x)=1;$$

$\sin\frac{\pi x}{2l}dx = g^{'}(x)dx = dg(x)$;

$\int \sin\frac{\pi x}{2l}dx = \int g^{'}(x)dx = \int dg(x) = g(x) = -\frac{2l}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2l}$;

$\int x\sin\frac{\pi x}{2l}dx = -\frac{2l}{\pi}.x.\cos\frac{\pi x}{2l} - \int\left[-\frac{2l}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2l}\right]dx =$

$-\frac{2l}{\pi}.x.\cos\frac{\pi x}{2l} + \left(\frac{2l}{\pi}\right)^2\sin\frac{\pi x}{2l}$;

$S_{BA}=\frac{4ql^2}{\pi^2}\left[-\frac{2l}{\pi}.x.\cos\frac{\pi x}{2l} + \left(\frac{2l}{\pi}\right)^2\sin\frac{\pi x}{2l}\right]_0^{2l} - \frac{2ql}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2l} + V_A^{"}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2l}$;

$S_{BA} = -1{,}181616\ ql^4 + 2{,}66\ V^{"}_A\ l^3$,

Din figura 88 rezultă: $V_A^{"} + V_B^{"} = \frac{4ql}{\pi}$, una din condiţiile de echilibru a barei, fiind şi ecuaţia de verificare.

$.\sum M_{iz}(A) = 0; V_B^{"}.2l - \frac{4ql}{\pi}.l = 0; V_B^{"} = \frac{2ql}{\pi}$;

$\sum M_{iz}(B) = 0; V_A^{"}.2l - \frac{4ql}{\pi}.l = 0; V_A^{"} = \frac{2ql}{\pi}$; $S_{BA} = 0{,}512652ql^4$;

$M_{iz,B} = -\frac{3}{4}\frac{S_{BA}}{l^2} = -0{,}384489ql^2$, deoarece a dat cu semnul minus , trebuie să schimbăm sensul momentului , în acest caz sensul momentului fiind sensul acelor de ceasornic.

$V_A + V_B = \frac{4ql}{\pi} = 1{,}273885.ql$;

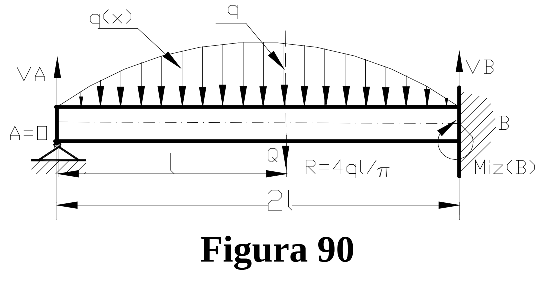


Figura 90

$\sum M_{iz}(A)=0;-V_B.2l+\frac{4ql}{\pi}.l+0,384489ql^2=0;V_B=0,829187ql$;

$\sum M_{iz}(B)=0;V_A.2l-\frac{4ql}{\pi}.l+0,384489ql^2=0;V_A=0,444698ql$; se verifică dacă nu s-a greşit la calcul , trebuie să fie îndeplinită condiţia de echilibru: $\sum M_{iz}(punct,oarecare)=0$, din plan sau spaţiu, statistic trebuie să ne verificăm în cel puţin cinci puncte pentru a fi siguri că am calculat corect.

$\sum M_{iz}(Q)=0;0,444698ql.l+0,384489ql^2-0,829187ql.l=0;0=0$

$M_{iz}(x)=\frac{4ql^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2l}-\frac{2ql}{\pi}x+0,444698ql.x$;

$\lim_{x\downarrow 0} M_{iz}(x)=\lim_{x\downarrow 0}\left(\frac{4ql^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2l}-\frac{2ql}{\pi}x+0,444698ql.x\right)=0;$

$\lim_{x\uparrow 2l} M_{iz}(x)=\lim_{x\uparrow 2l}\left(\frac{4ql^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2l}-\frac{2ql}{\pi}x+0,444698ql.x\right)=$

$=-0,384489ql^2;$

$\frac{dM_{iz}(x)}{dx}=T(x)=\frac{2ql}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2l}-\frac{2ql}{\pi}+0,444698ql;$

$\frac{d^2M_{iz}(x)}{dx^2}=-q\sin\frac{\pi x}{2l}<0$; concavă.

$\frac{dM_{iz}(x)}{dx}=T(x)=\frac{2ql}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2l}-\frac{2ql}{\pi}+0,444698ql=0;x=0,804706l$; fiind punctul de extrem, în acest caz punct de maxim.

$M_{iz\max}=M_{iz}(0,804706l)=1,059713ql^2=$

$=1,059713*1,3\frac{N}{m}*(0,285m)^2=1,059713*1,3*(0,285)^2*10^3\,N.mm$

$M_{iz\max}=111,897745N.mm;$

$I_z=\left(\frac{60^3*40}{12}-\frac{\pi*10^4}{64}\right)mm^4=71,950913*10^4\,mm^4;$

$$W_{z\min} = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{71{,}950913 * 10^4 mm^4}{30mm} = 2{,}398364 * 10^4 mm^3;$$

relaţia de verificare , a barei este:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{iz\max}}{W_{z\min}} = \frac{111{,}897745 N.mm}{2{,}398364 * 10^4 mm^3} = 0{,}004666 \frac{N}{mm^2} < \sigma_a$$

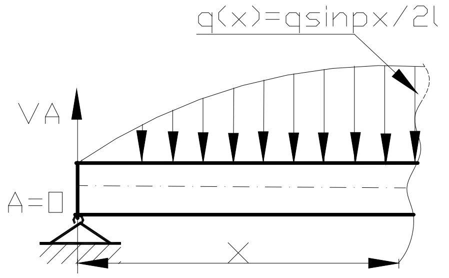


Figura 91

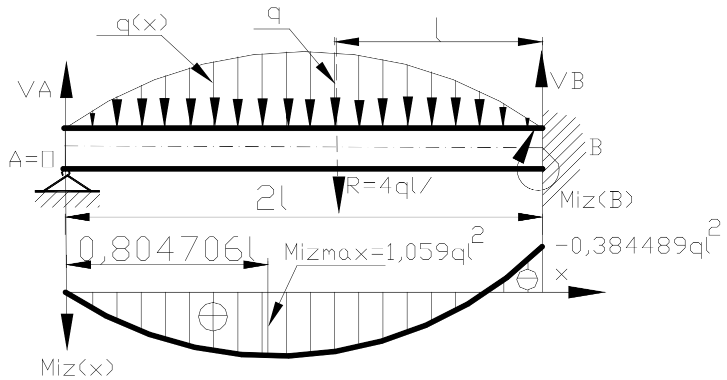


Figura 92

<u>6.21. Teorema reciprocităţii deplasărilor sau teorema lui Maxwell</u>

Se consideră aceeaşi succesiune de încărcări ca la demonstrarea teoremei reciprocităţii lucrului mecanic, dar în acest caz, se ia o bară simplu rezemată la capete , unde prima stare de încărcare este formată din forţa $\vec{F}$, aplicată în secţiunea (1), iar a doua stare suprapusă peste prima , este formată tot de o forţă $\vec{F}$, aplicată în secţiunea (2) ca în figura 93 .

Se ţine cont de următoarea notaţie :

v_{11} - fiind , săgeata în secţiunea (1), datorită primei stări de încărcare;
v_{21} - fiind , săgeata în secţiunea (2), datorită primei stări de încărcare;
v_{12} - fiind , săgeata în secţiunea (1), datorită celei de-a doua stări de încărcare;
v_{22} - fiind , săgeata în secţiunea (2), datorită celei de-a doua stări de încărcare.

În cazul primei stări de încărcare , lucrul mecanic produs de forţa $\vec{F}$ aplicată static , este : $L_{11} = \frac{F * v_{11}}{2}$; după aplicarea celei de-a doua stări, se adaugă lucrul mecanic , conform figurii,

$L_{22} + L_{12} = \frac{F * v_{22}}{2} + F * v_{12}$, unde $L_{12} = F * v_{12}$, nu are factorul (½), deoarece forţa $\vec{F}$ din secţiunea (1) se află pe grindă şi parcurge cu întrega sa intensitate , drumul v_{12}.

La finalul stării a doua , energia totală acumulată de bară , este :

$L = \frac{1}{2} F * v_{11} + \frac{F * v_{22}}{2} + F * v_{12}$. Dacă se schimbă succesiunea stărilor de încărcare şi se egalează energiile se ajunge la exprimarea teoremei reciprocităţii sub forma :

$$L = \frac{1}{2} F * v_{11} + \frac{F * v_{22}}{2} + F * v_{21};$$

$$L_{22} = \frac{F * v_{22}}{2}; L_{11} + L_{21} = \frac{F * v_{11}}{2} + F v_{21};$$

$$L = L_{22} + L_{11} + L_{21} = \frac{F * v_{22}}{2} + \frac{F * v_{11}}{2} + F * v_{21}$$; L = L

$$\frac{F * v_{22}}{2} + \frac{F * v_{11}}{2} + F * v_{21} = \quad L = \frac{1}{2} F * v_{11} + \frac{F * v_{22}}{2} + F * v_{12};$$

$$F v_{12} = F v_{21}; v_{12} = v_{21};$$

Teorema lui Maxwell

Deplasarea produsă în secţiunea (1) a unei bare , când o forţă oarecare este aplicată în secţiunea (2), este egală cu deplasarea produsă în secţiunea (2) când aceeaşi forţă calcă în secţiunea (1), ambele deplasări sunt măsurate pe direcţiile forţelor respective. În cazul în care forţa $\vec{F}$ poate fi egală cu unitatea , adică egală cu forţa versor ; $\vec{u} = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} = \vec{1}$, teorema se mai numeşte şi teorema reciprocităţii deplasărilor unitare , anume : deplasarea produsă a unei bare în secţiunea (1) , pe direcţia forţei care se va aplica în această secţiune, de către forţa unitară (versor) aplicată în secţiunea (2) , este egală cu deplasarea produsă în secţiunea (2), de forţa unitară (versor) aplicată în secţiunea (1).

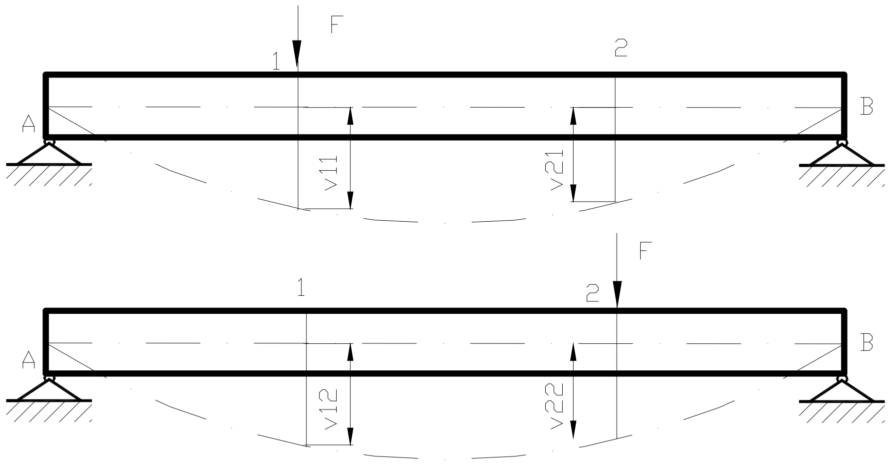


Figura 93

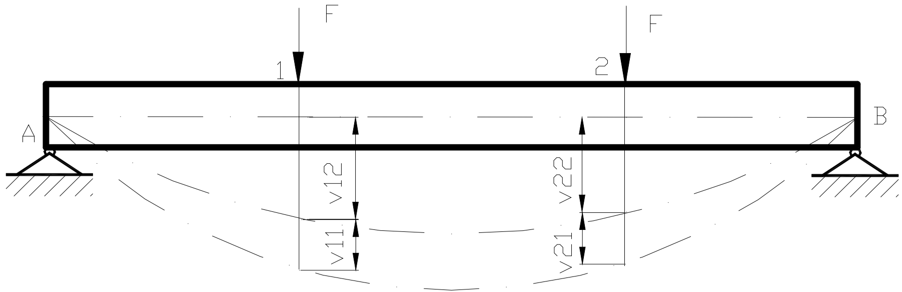


Figura 94

Sistem de bază

Rezistenţa materialelor posedă mai multe metode de rezolvare a sistemelor static nedeterminate, toate metodele pornesc de la faptul că ecuaţiile de echilibru ale staticii pot fi completate cu o serie de ecuaţii, bazate pe considerente de deformaţii , pentru barele drepte una din metodele cele mai des folosite, este şi metoda eforturilor.
În această metodă se transformă sistemul static nedeterminat în unul static determinat , numit sistem de bază sau sistem fundamental , suprimând atâtea legături exterioare cât este necesar.
În legătura suprimată, se introduce un efort static nedeterminat, notat de obcei , cu: Y_1, Y_2 …Y_n , în locul unui reazem simplu se introduce o singură forţă , tot la fel , atunci când o articulaţie se înlocuieşte cu un reazem simplu ; în locul unei articulaţii suprimate se introduc două forţe ; în locul locul unei încastrări se introduc două forţe şi un cuplu.
Transformarea sistemului în sistem de bază se face în mai multe moduri.
Considerînd eforturile : Y_1, Y_2 …Y_n cunoscute , sistemul de bază trebuie să fie , pe de o parte static determinat, pe de altă parte , indeformabil geometric, adică să nu permită deplasări cinematice ca în figura 95.

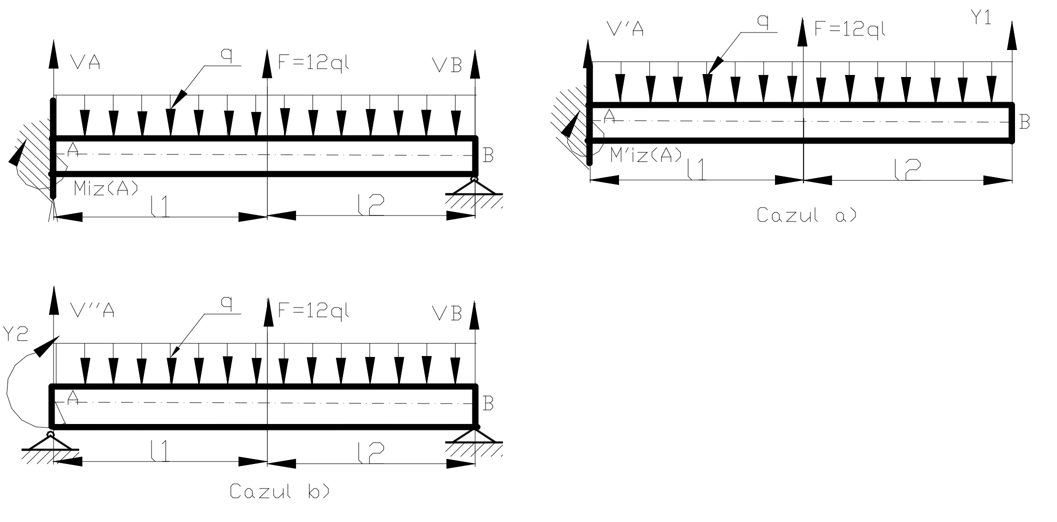


Figura 95

Problema nr. 5

Să se verifice bara din figura 96 : $\sigma_a = \frac{109N}{mm^2}; q = 2\frac{kN}{m}; l = 0,6m$.

Rezolvare:

S-a suprimat o singură legătură pentru formarea sistemului de bază, în acest caz s-a suprimat legătura pe verticală din articulaţia (B), înlocuind-o prin necunoscuta static nedeterminată $Y_1 = V_B$. Principial , în metoda eforturilor se exprimă deplasările în diferite puncte ale sistemului de bază , datorită sarcinilor date şi necunoscutelor static nedeterminate, scriind că ele sunt identice cu

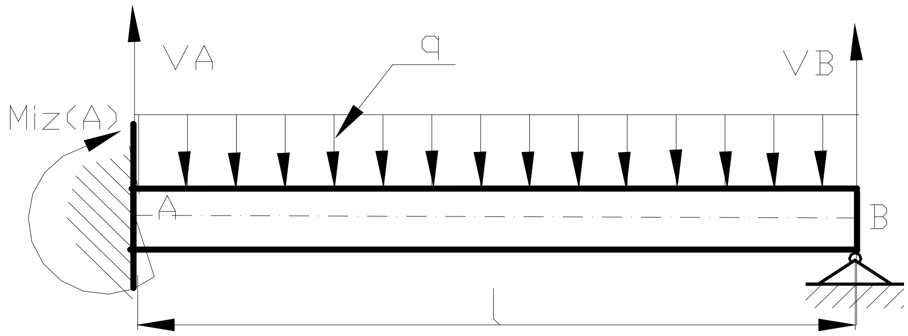


Figura 96

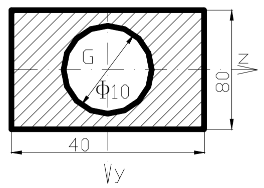


Figura 97

cele din sistemul static nedeterminat dat . Se va ţine seama de faptul că în reazemul (B) deplasarea pe verticală , a sistemului de bază , fie ea δ_1 , este nulă , ca şi în sistemul iniţial. Este avatajos să folosim principiul suprapunerii efectelor în modul următor:

a) se consideră întâi că în sistemul de bază lucrează numai sarcinile exterioare date, în cazul de faţă sarcina (q) distribuită , deci nu există forţa $\vec{Y}_1$, şi se calculează deplasarea ce le corespunde pe direcţia forţei $\vec{Y}_1$, adică δ_{10} .

b) se consideră apoi că în sistemul de bază lucrează numai forţa $\vec{Y}_1$ şi se calculează deplasarea corespunzătoare, este preferabil ca în locul unei forţe $\vec{Y}_1$ să se aplice o forţă unitară (versor) a forţei $\vec{Y}_1$ care produce deplasarea δ_{11} arătată în figura 99 , atunci unei forţe $\vec{Y}_1$, îi va corespunde o deplasare ($\delta_{11} \cdot Y_1$) .

c) aplicând principiul suprapunerii efectelor , se scrie că deplasarea totală este nulă :

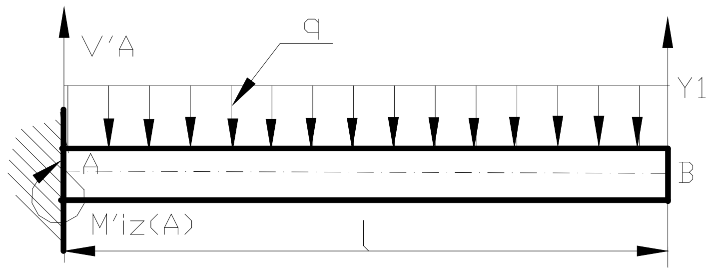


Figura 98

$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} * Y_1 = 0$, de aici rezultă , $Y_1 = -\dfrac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$, această relaţie are un caracter general .

Cazul I

Când acţionează forţa distribuită.

Regiunea întâi

Din figura 99 rezultă:

$$x_1 \in (0;l) \quad M_{iz}(x_1) = -\frac{qx_1^2}{2}; \quad \frac{dM_{iz}(x_1)}{dx_1} = -qx_1; M''(x_1) = -q < 0$$

concavă , $\lim\limits_{x_1 \downarrow 0} M_{iz}(x_1) = \lim\limits_{x_1 \downarrow 0}\left(-\dfrac{qx_1^2}{2} \right) = 0$

$$\lim_{x_1 \uparrow l} M_{iz}(x_1) = \lim_{x_1 \uparrow l}\left(-\frac{qx_1^2}{2} \right) = -\frac{ql^2}{2} ;$$

Cazul II

Când acţionează forţa versor (unitate) în capătul liber al barei.

Regiunea întâi

$x_1 \in (0;l) \quad m_{iz}(x_1) = x_1; \quad \lim_{x_1 \downarrow 0} m_{iz}(x_1) = \lim_{x_1 \downarrow 0}(x_1) = 0$; se notează

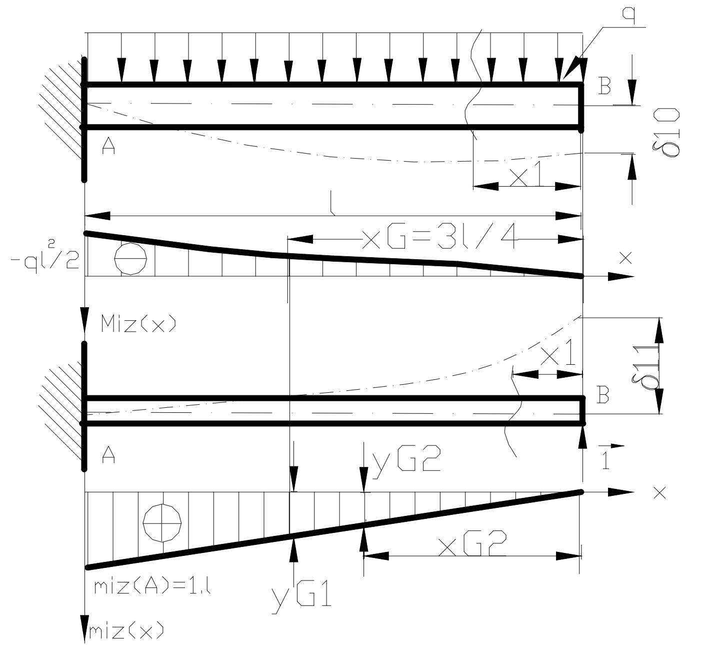


Figura 99

momentul încovoietor dintr-0 secţiune cu $m_{iz}(x_1)$, pentru că provine de la fortă egală cu unitatea (forţa versor care este $\vec{1} = \frac{\vec{Y}_1}{|\vec{Y}_1|} = \frac{\vec{V}_B}{|\vec{V}_B|} = \vec{u}_{\vec{V}_B}$).

$\lim_{x_1 \uparrow l} m_{iz}(x_1) = \lim_{x_1 \uparrow l}(x_1) = l$.

În aflarea coeficintului δ_{10}, se ia diagrama $M_{iz}(x_1)$ din figură şi se înmulţeşte după regula lui Veresceaghin, cu ordonata diagramei $m_{iz}(x_1)$ din dreptul centrului de greutate al digramei $M_{iz}(x_1)$.

[unde $x_1 = x$]

$$x_G = \frac{\int_0^l x M_{iz}(x)dx}{\int_0^l M_{iz}(x)dx} = \frac{\int_0^l x.\left(\frac{-qx^2}{2}\right)dx}{\int_0^l \left(\frac{-qx^2}{2}\right)dx} = \frac{3l}{4};$$

Aria diagramei $M_{iz}(x)$ va fi : $A=\int_0^l\left(-\frac{qx^2}{2}\right)dx=-\frac{qx^3}{6}\Big|_0^l=-\frac{ql^3}{6}$;

$EI_z\delta_{10}=-\frac{ql^3}{6}\frac{3l}{4}=A*y_{G1};\delta_{10}=-\frac{ql^4}{8EI_z}$; y_{G1} = 3l/4

Aria diagramei $m_{iz}(x)$ va fi :

$a=\int_0^l xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^l=\frac{l^2}{2}$; $EI_z\delta_{11}=\frac{l^2}{2}\frac{2l}{3}=a*y_{G2};\delta_{11}=\frac{l^3}{3EI_z}$;

$V_B=Y_1=-\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}=-\frac{-\frac{ql^4}{8EI_z}}{\frac{l^3}{3EI_z}}=\frac{3ql}{8}$, unde y_{G2} = 2l /3

Regiunea întâi (figura 100)

$x\in(0;l)\quad M_{iz}(x)=\frac{3qlx}{8}-\frac{qx^2}{2}$;

$\frac{dM_{iz}(x)}{dx}=\frac{3ql}{8}-qx\ ;M''(x_1)=-q<0$, concavă

$$\lim_{x\downarrow 0}M_{iz}(x)=\lim_{x\downarrow 0}\left(\frac{3qlx}{8}-\frac{qx^2}{2}\right)=0\ ;$$

$$\lim_{x\uparrow l}M_{iz}(x)=\lim_{x\uparrow l}\left(\frac{3qlx}{8}-\frac{qx^2}{2}\right)=-\frac{ql^2}{8}$$

$\frac{dM_{iz}(x)}{dx}=\frac{3ql}{8}-qx=0;x=\frac{3l}{8}$**,** punct de extrem, punct de maxim.

$$M_{max}=M_{iz}\left(\frac{3l}{8}\right)=\lim_{x\to\frac{3l}{8}}M_{iz}(x)=\lim_{x\to\frac{3l}{8}}\left(\frac{3qlx}{8}-\frac{qx^2}{2}\right)=9\frac{ql^2}{128}$$

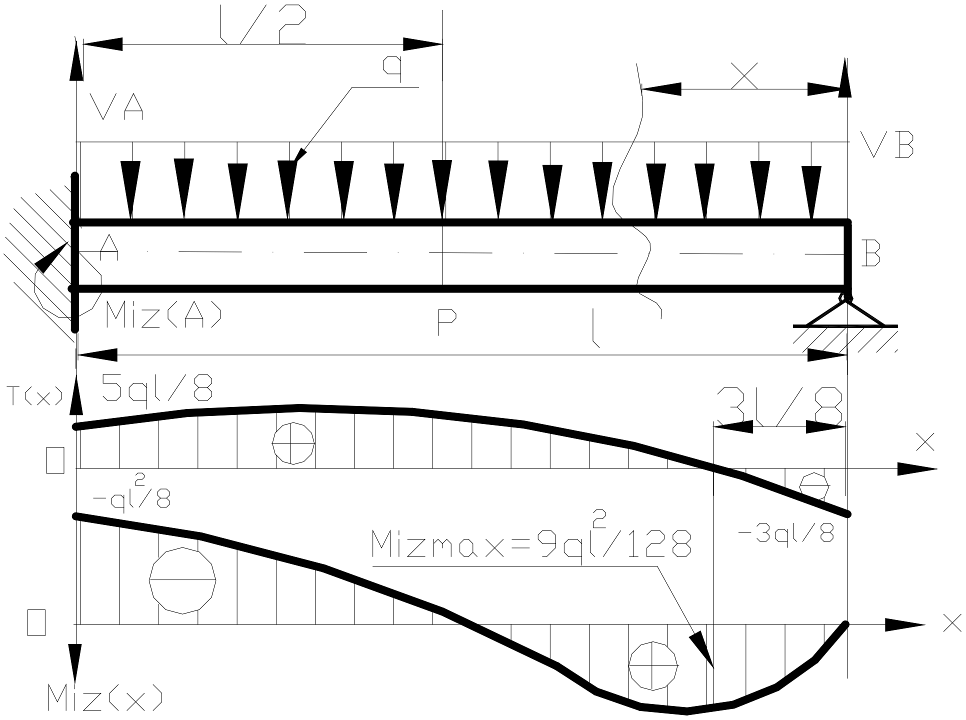


Figura 100

$$T(x)=-\frac{3ql}{8}+qx\,;\quad \frac{\lim}{x\uparrow 0}T(x)=\frac{\lim}{x\uparrow 0}\left(-\frac{3ql}{8}+qx\right)=-\frac{3ql}{8}\,;$$

$\frac{\lim}{x\uparrow l}T(x)=\frac{\lim}{x\uparrow l}\left(-\frac{3ql}{8}+qx\right)=\frac{5ql}{8}$; se verifică calculul corect, prin $\sum M_{iz}(oarecare)=0$; o condiţie de echilibru .

$$\sum M_{iz}(A)=0;-\frac{3ql}{8}.l+\frac{l}{2}*ql-\frac{ql^2}{8}=0;0=0$$, verifică

$$\sum M_{iz}(B)=0;\frac{5ql}{8}*l-\frac{l}{2}*ql-\frac{ql^2}{8}=0;0=0$$, verifică,

$$\sum M_{iz}(P)=0;\frac{5ql}{8}*\frac{l}{2}-\frac{3ql}{8}*\frac{l}{2}-\frac{ql^2}{8}=0;0=0$$, verifică.

$$I_z=I_z^I-I_z^{II}=\left(\frac{40*8^3}{12}-\frac{\pi*10^4}{64}\right)mm^4=127,95*10^4\,mm^4;\,y_{\max}=40mm;$$

$$W_{z\min}=\frac{I_z}{y_{\max}}=\frac{127{,}95*10^4 mm^4}{40mm}=3{,}19875*10^4 mm^3; M_{iz\max}=\left|-\frac{ql^2}{8}\right|$$

$$M_{iz\max}=2\frac{kN}{m}*\frac{(0{,}6m)^2}{8}=0{,}09*10^6 N.mm=9*10^4 N.mm; \sigma_{\max}=\frac{M_{iz\max}}{W_{z\min}}$$

$$\sigma_{\max}=\frac{9*10^4 N.mm}{3{,}19875*10^4 mm^3}=2{,}8135\frac{N}{mm^2}<\sigma_a;$$ bara nu se rupe,în acest fel se verifică . Pentru problemele multiplu static nedeterminate, se procedează la o generalizare a metodei expuse, prin suprimarea la o serie de legături, obţinând sistemul de bază , solicitat prin încărcarea dată , plus eforturile Y_1, Y_2 …Y_n care înlocuiesc legăturile suprimate. Se ţine cont şi de faptul că deplasările în dreptul acestor eforturi sunt nule (egale cu zero) ,de aici rezultă :

$$\begin{cases}\delta_1=\delta_{11}*Y_1+\delta_{12}*Y_2+...+\delta_{1n}*Y_n+\delta_{10}=0\\ \delta_2=\delta_{21}*Y_1+\delta_{22}*Y_2+...+\delta_{2n}*Y_n+\delta_{20}=0\\ .\\ .\\ .\\ \delta_n=\delta_{n1}*Y_1+\delta_{n2}*Y_2+...+\delta_{nn}*Y_n+\delta_{n0}=0\end{cases}$$

Aceste ecuatii se numesc ecuaţii de condiţie sau ecuaţii canonice în metoda eforturilor, unde coeficienţii (δ_{ij}) din aceste ecuaţii , semnifică următoarele :

- δ_{11} este deplasarea pe direcţia efortului Y_1 produsă de o sarcină unitară aplicată în acelaşi punct şi pe aceeaşi direcţie cu Y_1;
- δ_{12} este deplasarea pe direcţia efortului Y_1 produsă de o sarcină unitară aplicată în acelaşi punct cu Y_2 şi având direcţia lui Y_2;
- δ_{22} este deplasarea pe direcţia efortului Y_2 produsă de o sarcină unitară aplicată în celaşi punct şi pe aceeaşi direcţie cu Y_2;
- δ_{n0} este deplasarea pe direcţia efortului Y_n produsă de sarcinile exterioare aplicate sistemului, când nu există eforturile Y_n .

Coeficienţii (δ_{ij}) se pot determina prin metoda Mohr-Maxwell sau pe altă cale, ţinând cont de teorema reciprocităţii deplasărilor se poate scrie că : $\delta_{ij}=\delta_{ji}$.

Prezentarea modului de calcul al coeficienţilor (δ_{ij}) prin metoda Mohr-Maxwell: M_{iz}^{0} - fiind momentul încovoietor într-o secţiune oarecare a sistemului de bază , produs de forţele şi momentele exterioare date ;

m_{iz}^{1} , m_{iz}^{2} ,…m_{iz}^{n} , momentele încovoietoare într-o secţiune oarecare produs de sarcinile versor (unitare) aplicate pe direcţiile şi în punctele de aplicaţie ale necunoscutelor static nedeterminate Y_1 , Y_2 , …Y_n şi coeficienţii (δ_{ij}) se obţin din ecuaţiile următoare;

$$\delta_{10} = \sum\int \frac{1}{EI_z}\left(M_{iz}^{0} * m_{iz}^{1}\right)dx;\ \delta_{11} = \sum\int \frac{1}{EI_z}\left(m_{iz}^{1}\right)^2 dx;$$

$$\delta_{12} = \sum\int \frac{1}{EI_z}\left(m_{iz}^{2} * m_{iz}^{1}\right)dx; \ldots \delta_{in} = \sum\int \frac{1}{EI_z}\left(m_{iz}^{i} * m_{iz}^{n}\right)dx$$

. Folosind metoda de integrare a lui Veresceaghin , se calculează: δ_{10} , din diagramele M_{iz}^{0}, m_{iz}^{1} ; δ_{11} din diagrama m_{iz}^{1} cu ea însăşi ; δ_{12} din diagrama m_{iz}^{1} cu diagrama m_{iz}^{2} , luând suprafaţa uneia şi ordonatele celeilalte (după cum dorim).

Capitolul VII

Stabilitate elastică
(Flambaj)

Stabilitatea echilibrului elastic.
7.1. Definiţia flambajului

Până acum s-a studiat rezistenţa pieselor de construcţie pe baza eforturilor unitare şi a deformaţiilor produse de diferite feluri de solicitări. S-a considerat că piesele se află în stare de echilibru static. Din mecanica teoretică, echilibrul unui corp rigid poate fi stabil, nestabil sau indiferent.

O bilă metalică , asupra căreia acţionează numai greutatea proprie şi rezemată pe o suprafaţă , se află în echilibru atunci când punctul de reazem se află pe verticala centrului de greutate şi forţa de greutate este echilibrată de reacţiunea reazemului.

Bila se află în poziţia de echilibru stabil, figura 101 (a), în echilibru nestabil, figura 101 (b) şi indiferent, figura 101 (c), după cum suprafaţa de rezemare este o suprafaţă convexă, o suprafaţă concavă sau o suprafaţă plană orizontală.

La mici perturbaţii de la poziţia de echilibru instabil, centrul de greutate coboară şi bila nu mai revine la poziţia iniţială, iar în cazul echilibrului indiferent, centrul de greutate al bilei păstrează cota neschimbată şi bila se află în stare de echilibru, oricare ar fi poziţia sa pe planul orizontal.

Un alt exemplu din figura 102 de echilibru stabil, nestabil sau indiferent îl constituie cazul unui disc omogen suspendat într-un punct, poziţia de echilibru va fi realizată atunci când centrul său de greutate (G) şi punctul de suspensie (A) se găsesc pe aceeaşi verticală.

Echilibrul poate fi stabil, nestabil sau indiferent, după cum centrul (G) se află dedesubtul punctului de suspensie (A) , deasupra acestuia sau cele două puncte coincid

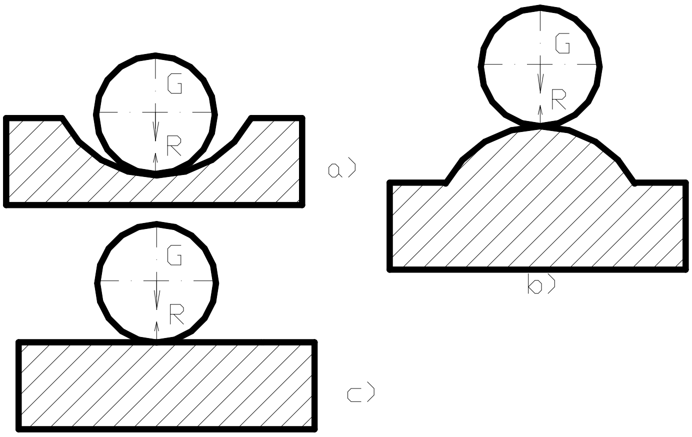


Figura 101

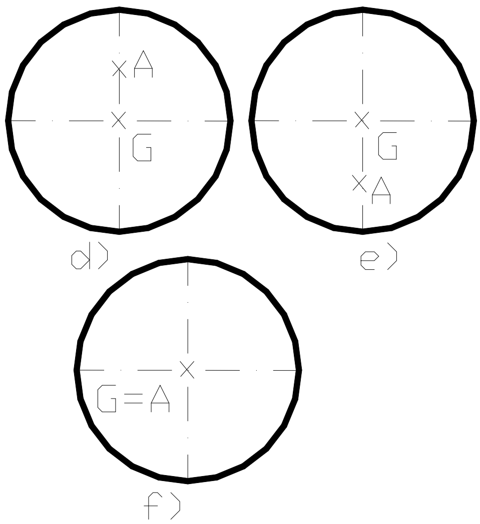


Figura 102

Cazul III

Studiul unui con circular drept care se reazemă pe un plan orizontal. Pentru poziţia de echilibru stabil, (fig. 103 g) , centrul de greutate al conului are cota minimă faţă de planul de rezemare în poziţia de echilibru nestabil, (fig. 103 i), cota este maximă, iar în poziţia de echilibru indiferent, (fig. 103 j), cota păstrează aceeaşi valoare.

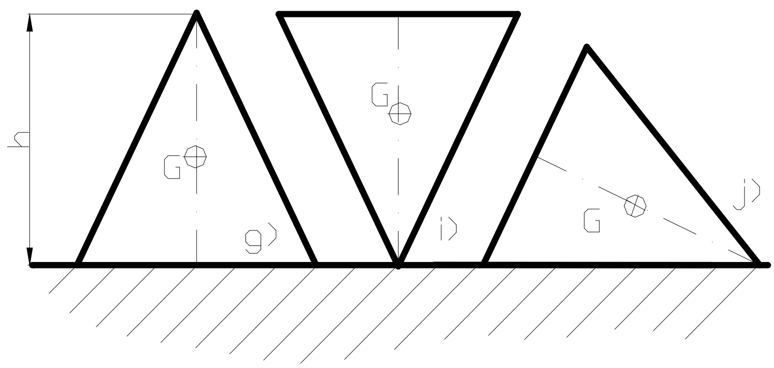


Figura 103

Ìn realitate, numeroasele piese de construcţii, se află în stare de echilibru instabil, datorită mărimii forţelor exterioare la care sunt supuse.

Acest lucru se va exemplifica prin prezentarea câtorva cazuri. Dacă avem o bară dreaptă , elastică, supusă la compresiune sub acţiunea a două forţe axiale $\vec{F}$, a căror intensitate creşte treptat.

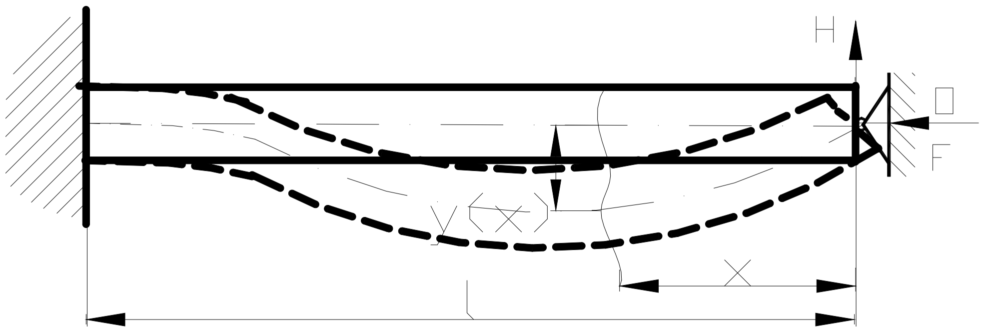


Figura 104



Figura 105

Bara se află în echilibru stabil atâta timp cât forţa $\vec{F}$ nu atinge o anumită limită F_f , în cazul în care forţa $\vec{F}$ depăşeşte această limită,

bara se încovoaie brusc. Acest fenomen de încovoiere a unei bare sub acţiunea sarcinii axiale de compresiune poartă numele de **flambaj**. Valoarea forţei F, la care se produce flambajul, se numeşte **forţă critică de flambaj** şi se notează cu F_f.

Cât timp $F < F_f$, bara îşi păstrează forma rectilinie, care este forma stabilă a echilibrului său. În cazul în care se aplică o forţă orizontală, bara este scoasă din poziţia dreaptă şi dacă se înlătură această forţă, bara execută o serie de oscilaţii şi revine la poziţia iniţială, datorită elasticităţii sale.

Când $F > F_f$, forma rectilinie încetează de a mai fi formă de echilibru stabil, bara se curbează, fără să mai poată reveni la poziţia iniţială, bara se deformează până se rupe.

Un alt caz, este cel al unui inel subţire, supus unei presiuni exterioare (q) uniform repartizată pe circumferinţa sa, are forma toroidală de echilibru stabil.

După atingerea presiuni critice de flambaj el poate lua forma oarecare indicată pe figura 106.

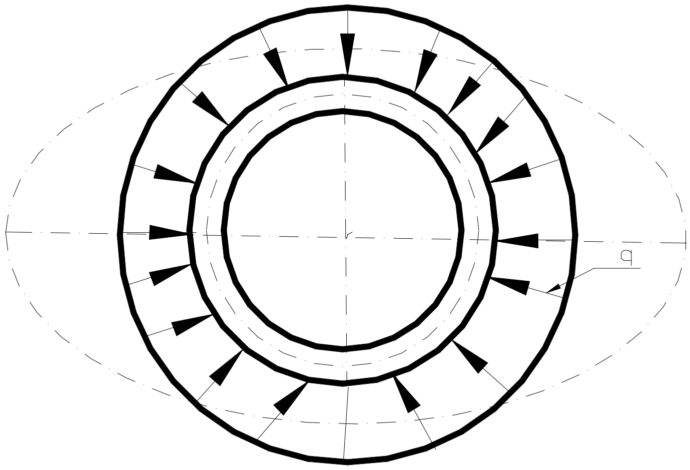


Figura 106

Cazul III

O grindă de secţiune dreptunghiulară îngustă la un capăt şi încărcată cu o forţă concentrată la capătul liber.

Când forţa F nu atinge valoarea critică, există o încovoiere a grinzii în planul vartical, fiind o formă de încovoiere stabilă. Atunci când $F > F_f$, pe lângă încovoierea din planul vertical, apare şi o încovoiere în planul orizontal, însoţită de o răsucire a grinzii.
Când o piesă dintr-o construcţie se află în echilibru nestabil, calculul de rezistenţă nu trebuie făcut, nu-şi are rostul. Construcţia care iese din starea de echilibru, o piesă se rupe sau întreaga construcţie, nu din cauza rezistenţei mecanice insuficiente, ci datorită poziţiei iniţiale corespunzătoare echilibrului nestabil.
Calculul la flambaj constă în determinarea forţei critice şi alegerea unui coeficient de siguranţă, astfel încât forţa reală care solicită bara la compresiune să fie inferioară forţei critice de flambaj.

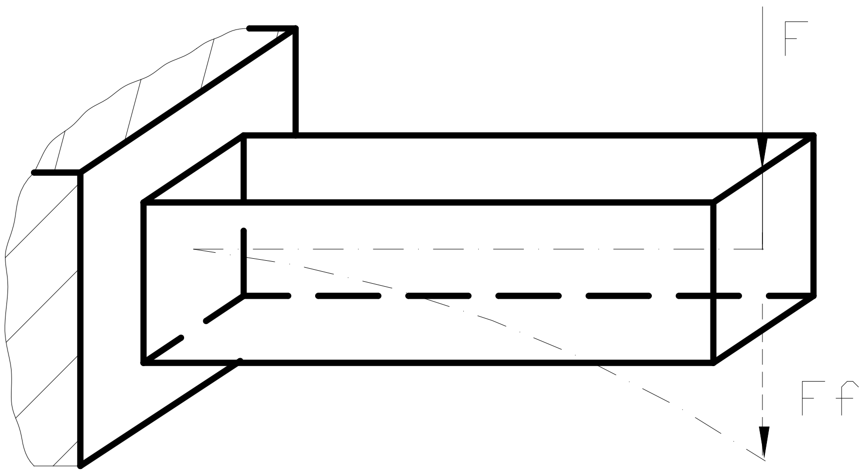


Figura 107

7.2. Formula lui Euler pentru calculul forţei critice de flambaj la barele drepte

O bară dreaptă, subţire şi elastică, solicitată la compresiune sub acţiunea a două forţe axiale, părăseşte forma dreaptă de echilibru, adică flambează în momentul când se depăşeşte forţa critică de

flambaj. Apariţia fenomenului de flambaj apare datorită următoarelor cauze:

- excentricitatea inevitabilă a punctului de aplicaţie al forţei de compresiune;
- micile abateri de la linia dreaptă pe care le poate avea axa barei;
- imperfecta omogenitate a materialului din care este făcută bara.

În anul 1744 Euler a studiat fenomenul flambajului, a calculat pe cale analitică formula cu ajutorul căreia se poate calcula forţa critică de flambaj în cazul barelor drepte, solicitate la compresiune. Vom determina după metoda lui Euler valoarea critică de flambaj pentru bare solicitate la compresiune, care diferă între ele numai prin felul reazemului:

- bara articulată la ambele capete;
- bara încastrată la un capăt şi liberă la celălalt;
- bara încastrată la un capăt şi articulată la celălalt;
- bara încastrată la ambele cap**ete.**

7.2.1. Bara articulată la ambele capete

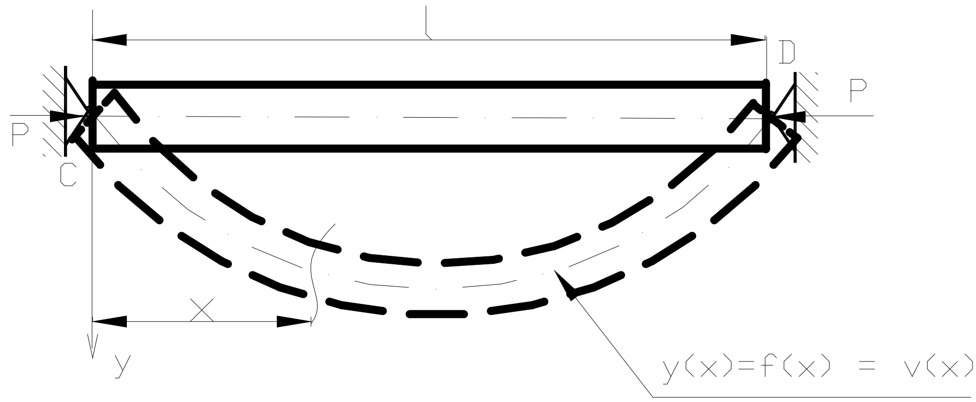


Figura 108

Avem o bară dreaptă , de lungime l, articulată la ambele capete şi supusă acţiunii forţei axiale de compresiune P . Bara se curbează **în**

momentul când $P = P_f$. Într-o secţiune oarecare la distanţa x, forta va produce un moment încovoietor $M_{iz}(x)$; $M_{iz}(x) = Py$ unde $y = y(x)$ reprezentând săgeata barei în dreptul secţiunii curente.
Pornind de la ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate :

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = -M_{iz}(x) = -Py \quad ; \quad EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = -Py \quad ;$$

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0; \frac{d^2y}{dx^2} + Py\frac{1}{EI_z} = 0;$$ se notează cu

$\alpha^2 = \frac{P}{EI_z}$; ecaţia diferenţială devine: $\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0$ **.**

Soluţia generală a acestei ecuaţii diferenţiale cu coeficienţii constanţi este: $y(x) = A\sin\alpha.x + B\cos\alpha.x$; pentru a se determina constantele de integrare A şi B , se scriu condiţiile de reazem ale barei , pe care le luăm în considerare şi anume:

$\lim\limits_{x \downarrow 0} y(x) = 0$; pentru capătul din C , iar $\lim\limits_{x \uparrow l} y(x) = 0$; pentru capătul din D şi la mijlocul barei există condiţia ,

$\lim\limits_{x \to \frac{l}{2}} \frac{dy(x)}{dx} = 0$. Din $\lim\limits_{x \downarrow 0} y(x) = 0$, avem

$y(0) = A\sin\alpha.0 + B\cos\alpha.0 = B = 0$; deci B = 0 ; $y(x) = A\sin\alpha.x$;

şi din $\lim\limits_{x \uparrow l} y(x) = 0$, rezultă $y(l) = A\sin\alpha.l = 0$; cum A $\neq 0$;

rezultă că ; sin α.l =0 ; pentru αl = 0 sau αl = $\pi, 2\pi, \ldots\ldots n\pi$

se ştie că din matematică sin x=β ; $x = k\pi + (-1)^k$ arcsin β;

soluţiile ecuaţiei trigonometrice generale. Dacă se ia $\alpha.l = 0$
$\sin\alpha.l = \sin 0 = 0$ cu $\alpha = 0$ deci P = 0 şi y = 0 nu interesează acest caz pentru că $P \neq 0$ din starea iniţială. Apoi luăm pe imediat următoarea

$\alpha.l = \pi$; $\alpha^2 = \frac{\pi^2}{l^2} = \frac{P}{EI_z} = \frac{F}{EI_z}$. S-a considerat bara într-o poziţie

deformată, deci forţa F = P, corespunzătoare relaţiei de mai sus reprezintă chiar forţa critică de flambaj, $P_f = F_f = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2}$. Pentru barele cu rigiditate variabilă, încovoierea va avea loc întotdeauna în acelaşi plan şi anume în planul de rigiditate minimă. În acest caz formula se scrie $F_f = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}$ aceasta fiind formula lui Euler pentru determinarea forţei critice de flambaj în cazul barei articulate la ambele capete, care este considerat un caz fundamental de flambaj.

Fibra medie deformată a barei, forma de echilibru corespunzătoare forţei critice astfel determinate, este o sinusoidă cu o singură buclă. $y(x) = A \sin \alpha.x$ dar $\alpha.l = \pi$; $\alpha = \frac{\pi}{l}$;

$$y(x) = A \sin \frac{\pi}{l} x.$$

Pentru următoarea soluţie (a treia) $\alpha.l = 2\pi$; $\alpha = \frac{2\pi}{l}$;

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI} \quad ; \quad \frac{4\pi}{l^2} = \frac{F_f}{EI_{min}} \quad ; \quad F_f = \frac{\pi^2 EI_{min}}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} \ ; \ F_{f3} = \frac{4\pi^2 EI_{min}}{l^2};$$

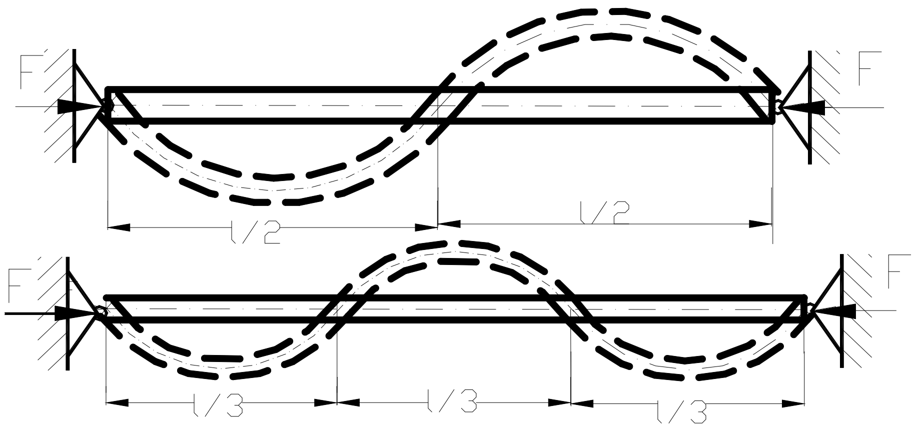


Figura 109

În acest caz F_{f3} este de patru ori mai mare decât cea precedentă şi corespunde cazului când mijlocul barei ar fi împiedicat să se deplaseze lateral.

La fel când se ia soluţia generală a ecuaţiei trigonometrice : $\alpha.l = n\pi$; $\alpha^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 = \frac{n^2}{l^2}\pi^2 = \frac{F_f}{EI_{\min}}$;

$F_f = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{\left(\frac{l}{n}\right)^2} = \frac{\pi EI_{\min}}{l^2} * n^2$ corespunzătoare cazului când bara ar fi împiedicată să se deplaseze lateral în (n-1) puncte intermediare. Ecuaţia fibrei medii deformate în acest caz este:

$y(x) = v(x) = A\sin\frac{n\pi}{l}x$ pentru că $\alpha = \frac{n\pi}{l}$. Ne interesează valoarea minimă a forţei critice de flambaj : $F_f = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}$

<u>7.2.2. Bara încastrată la un capăt şi liberă la celălalt capăt</u>

S-a ales originea reperului din capătul liber al barei, momentul încovoietor produs de forţa F va fi : $M_{iz}(x) = F.y$. Ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate fiind : $EI_z\frac{d^2y}{dx^2} = -F.y$; la fel $y(x) = v(x) = A\sin\alpha.x + B\cos\alpha.x$ soluţia ecuaţiei diferenţiale. Pentru determinarea constantelor A şi B se scriu condiţiile limită : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y(x) = 0$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to l\\ x<l}} \frac{dy}{dx} = 0$.Folosind aceste condiţii vom obţine

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (A\sin\alpha.x + B\cos\alpha.x) = 0$, A sin 0 + B cos 0 = 0 ; A*0+B = 0 ; B=0; $y(x) = A\sin\alpha.x$; $y'(x) = \frac{dy}{dx} = A\alpha\cos x$;

$\lim_{\substack{x \to l \\ x < l}} \frac{dy}{dx} = \lim_{\substack{x \to l \\ x < l}} A\cos\alpha x = 0$; $\cos\alpha.l = 0$; $\alpha.l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\ldots\ldots, (2n+1)\frac{\pi}{2}$ unde $n \in N$, oarecare. Se ia prima soluţie

$\alpha.l = \frac{\pi}{2}$; $\alpha = \frac{\pi}{2l}$ rezultă $\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}}$; $\frac{\pi^2}{(2l)^2} = \frac{F}{EI_{min}}$;

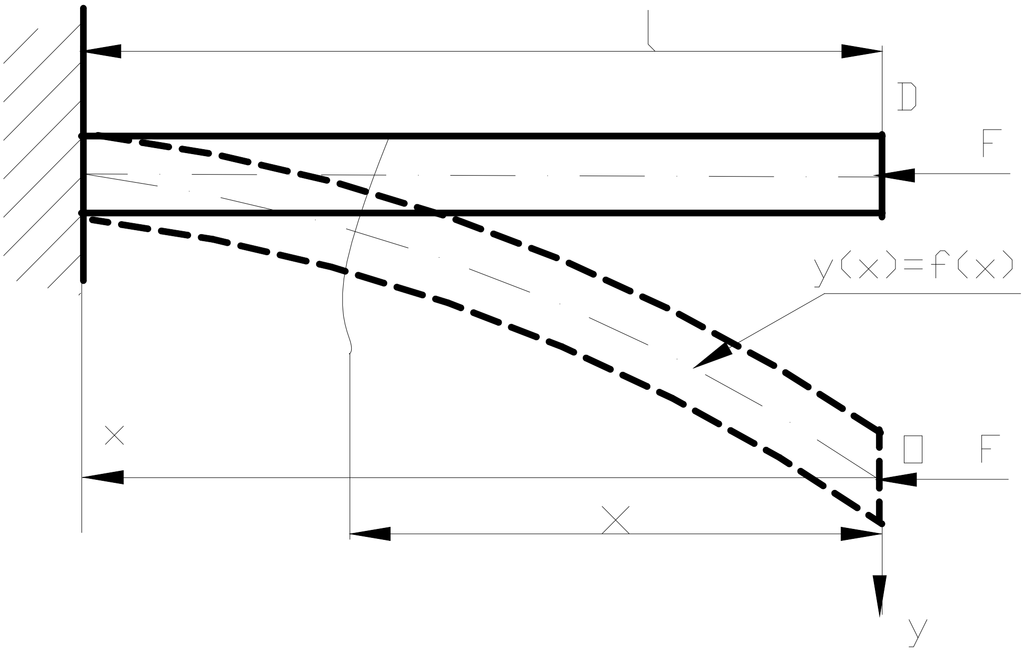


Figura 110

$$F_f = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(2l)^2}$$

Fibra medie deformată corespunzătoare forţei critice de flambaj este o sinusoidă $y(x) = v(x) = A \sin \frac{\pi x}{2l}$

În cazul celorlalte soluţii, forţa critică de flambaj ia valori mai mari corespunzătoare cazurilor când anumite puncte ale barei ar fi împiedicate să se deplaseze lateral.

7.2.3. <u>Bara încastrată la un capăt şi articulată la celălalt</u>

Fie $\vec{H}$ reacţiunea necunoscută , expresia momentului încovoietor într-o secţiune oarecare x va fi $: M_{iz}(x) = F.y - H.x$.

Ecuaţia fibrei medii deformate va fi $EI\frac{d^2y}{dx^2} = -F.y + H.x$;

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_{min}} \quad ; \quad EI_{min}\frac{d^2y}{dx^2} + Fy = H.x$$

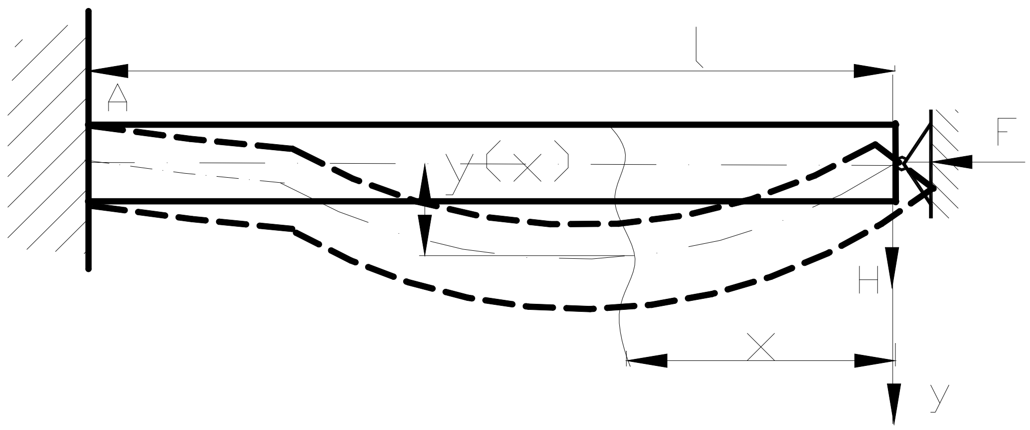


Figura 111

$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{F}{EI_{min}}y=\frac{H}{EI_{min}}x$; $\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha^2 y=\frac{H}{EI_{min}}x$ este o ecuaţie diferenţială liniară neomogenă.

$\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha^2 y=0$; soluţia de la omogenă

$y_1(x)=v_1(x)=A\sin\alpha.x+B\cos\alpha.x$ şi $\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha^2 y=\frac{H}{EI_{min}}x$ este ecuaţia diferenţială neomogenă admite cu soluţia: $y_2(x)=Cx+D$,

unde $\frac{dy_2(x)}{dx}=C$; $\frac{d^2y_2(x)}{dx^2}=0$, introducând în

$\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha^2 y=\frac{H}{EI_{min}}x$; $0+\alpha^2(Cx+D)=\frac{H}{EI_{min}}x$; prin identificare rezultă: $\alpha^2Cx+\alpha^2D=\frac{H}{EI_{min}}x+0$; $\alpha^2C=\frac{H}{EI_{min}}$ şi

$\alpha^2D=0$; D=0 ; $C=\frac{H}{\alpha^2EI_{min}}$;

$\alpha^2=\frac{F}{EI_{min}}$; $C=\frac{H}{\frac{F}{EI_{min}}EI_{min}}=\frac{H}{F}$; $C=\frac{H}{F}$ $y_2(x)=\frac{H}{F}x$

soluţia generală a ecuaţiei $\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha^2 y=\frac{H}{EI_{min}}x$;

$y(x)=y_1(x)+y_2(x)$; $y(x)=A\sin\alpha.x+B\cos\alpha.x.+\frac{H}{F}x$

Pentru determinarea constantelor A, B ,H se scriu următoarele condiţii limită :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y(x)=0 \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to l\\ x<l}} y(x)=0 \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to l\\ x<l}} \frac{dy}{dx}=0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} y(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(A\sin \alpha x + B\cos \alpha x + \frac{H}{F} x \right) = A\sin 0 + B\cos 0 +$$

$$+ \frac{H}{F} 0 = 0$$

implică B = 0

deci $y(x) = A\sin \alpha .x + \frac{H}{F} x$; $y'(x) = \frac{dy}{dx} = A\alpha \cos \alpha .x + \frac{H}{F}$;

$$\lim_{\substack{x \to l \\ x < l}} y(x) = \lim_{\substack{x \to l \\ x < l}} \left(A\sin \alpha .x + \frac{H}{F} x \right) = 0$$

$A\sin \alpha l + \frac{H}{F} l = 0$; $\lim_{\substack{x \to l \\ x < l}} \left(A\alpha \cos \alpha .x + \frac{H}{F} \right) = 0$; $A\alpha \cos \alpha .l + \frac{H}{F} = 0$

; $A\sin \alpha .l = -\frac{H}{F} l$; $A\alpha \cos \alpha .l = -\frac{H}{F}$; prin împărţire se obţine:

$\frac{A\sin \alpha .l}{A\alpha \cos \alpha .l} = \frac{-\frac{H}{F} l}{\frac{-H}{F}}$; $\frac{tg\alpha .l}{\alpha} = l$; $tg\alpha .l = \alpha .l$ este o ecuaţie transcendentă în α l, pe care o rezolvăm pe cale grafică.

Deci $\alpha .l = 4{,}493$; $\alpha^2 l^2 = 20{,}16 = 2{,}05\pi^2 \cong 2\pi^2$;

$\alpha^2 = \frac{2\pi^2}{l^2} = \frac{F}{EI_{min}}$ de unde $F_f = \frac{2\pi^2 EI_{min}}{l^2} == \frac{\pi^2 EI_{min}}{\left(\frac{l}{\sqrt{2}} \right)^2}$.

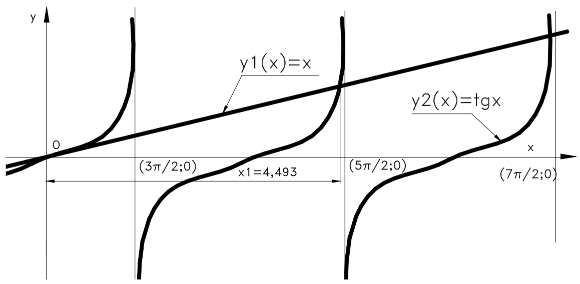


Figura 112

7.2.4. Bara încastrată la ambele capete

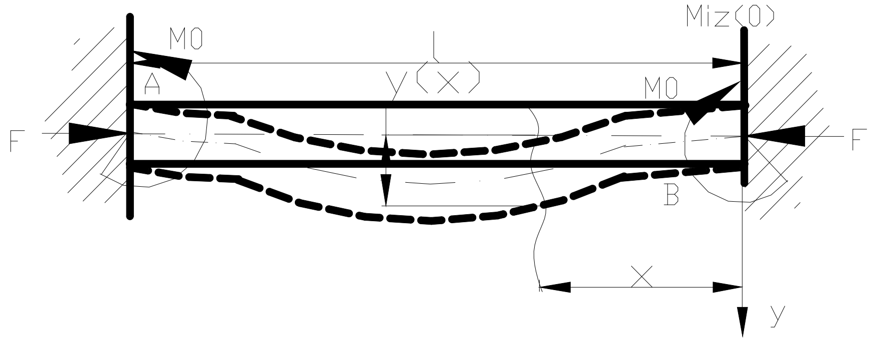


Figura 113

Expresia momentului încovoietor într-o secţiune oarecare (x) va fi :

$M_{iz}(x) = Fy - M_0$, unde M_0 fiind momentul de reacţiune din încastrare. Ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate fiind:

$$EI_{\min}\frac{d^2y}{dx^2} = -Fy + M_0 ; EI_{\min}\frac{d^2y}{dx^2} + Fy = M_0 \quad ;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{F}{EI_{\min}}y = \frac{M_0}{EI_{\min}} \quad ; \quad \alpha^2 = \frac{F}{EI_{\min}} \quad ;$$

$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha.y = \frac{M_0}{EI_{\min}} ; y = y_1 + y_2 \quad ; \quad y_1(x) = A\sin\alpha.x + B\cos\alpha.x$ soluţia de la ecuaţia diferenţială omogenă. $\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0$

şi $y_2(x) = Cx + D$ soluţia de la ecuaţia diferenţială neomogenă.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = \frac{M_0}{EI_{\min}} \quad ; \quad \frac{dy_2}{dx} = C \quad ; \quad \frac{d^2y_2}{dx^2} = 0$$

$$0 + \alpha^2(Cx + D) = \frac{M_0}{EI_{\min}} \quad ; \quad D = \frac{M_0}{\alpha^2 EI_{\min}} \quad ;$$

$$\alpha^2 Cx + \alpha^2 D = \frac{M_0}{EI_{\min}} = 0x + \frac{M_0}{EI_{\min}} \quad ; \quad \alpha^2 = \frac{F}{EI_{\min}} ; \text{C} = 0 ;$$

$D = \dfrac{M_0}{\dfrac{F}{EI_{min}} EI_{min}}$; $D = \dfrac{M_0}{F}$ deci $y_2(x) = \dfrac{M_0}{F}$; deci

$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale,

$y(x) = A\sin\alpha.x + B\cos\alpha.x + \dfrac{M_0}{F}$

Determinăm pe A, B, M_0 din condiţiile limită $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} y(x) = 0$,

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{dy}{dx} = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to l \\ x < l}} y(x) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to l \\ x < l}} \dfrac{dy}{dx} = 0$

$y(x) = A\sin\alpha.x + B\cos\alpha.x + \dfrac{M_0}{F}$;

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} y(x) = A\sin 0 + B\cos 0 + \dfrac{M_0}{F} = 0$; $B + \dfrac{M_0}{F} = 0$;

$B = -\dfrac{M_0}{F}$; $y'(x) = A\alpha\cos\alpha.x - B\alpha\sin\alpha.x = \dfrac{dy}{dx}$;

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{dy}{dx} = A\alpha\cos 0 - B\alpha\sin 0 = 0$; $A\alpha = 0$; A=0

$y(x) = B\cos\alpha.x + \dfrac{M_0}{F}$; $y'(x) = -B\sin\alpha.x$; $\lim\limits_{\substack{x \to l \\ x < l}} \dfrac{dy(x)}{dx} = -B\sin\alpha.l = 0$

; $\sin\alpha.l = 0$ $\lim\limits_{\substack{x \to l \\ x < l}} \left(B\cos\alpha.x + \dfrac{M_0}{F} \right) = 0$; $B\cos\alpha.l + \dfrac{M_0}{F} = 0$;

$-\dfrac{M_0}{F}\cos\alpha.l + \dfrac{M_0}{F} = 0$; $\dfrac{M_0}{F}(1 - \cos\alpha.l) = 0$; $1 - \cos\alpha.l = 0$

$\cos\alpha.l = 1$; $\sin\alpha.l = 0$; din $\cos\alpha.l = 1$ rezultă $\alpha.l = 0, 2\pi, 4\pi, ..., 2n\pi$
iar $\sin\alpha.l = 0$ rezultă $\alpha.l = 0, \pi, 2\pi, ..., n\pi$ unde
$n \in N$ oarecare. Se observă $\alpha.l = 0$, dar rezultă $\alpha = 0$ şi deci P = 0 deci imposibil. Forţa critică de flambaj rezultă din : $\alpha.l = 2\pi$

$$\alpha = \frac{2\pi}{l} \quad ; \quad \alpha^2 = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 = \frac{P_f}{EI_{min}} \quad ; \quad P_f = \frac{\pi^2 EI_{min}}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}.$$

Valoarea minimă a forţei critice de flambaj în cele patru cazuri studiate se poate scrie sub o formulă generală unitară : $P_f = \dfrac{\pi^2 EI_{min}}{l_f^2}$

care se numeşte formula lui Euler, unde l_f poartă numele de lungime de flambaj a barei.

Lungimile de flambaj sunt :

Cazul I $l_f = l$

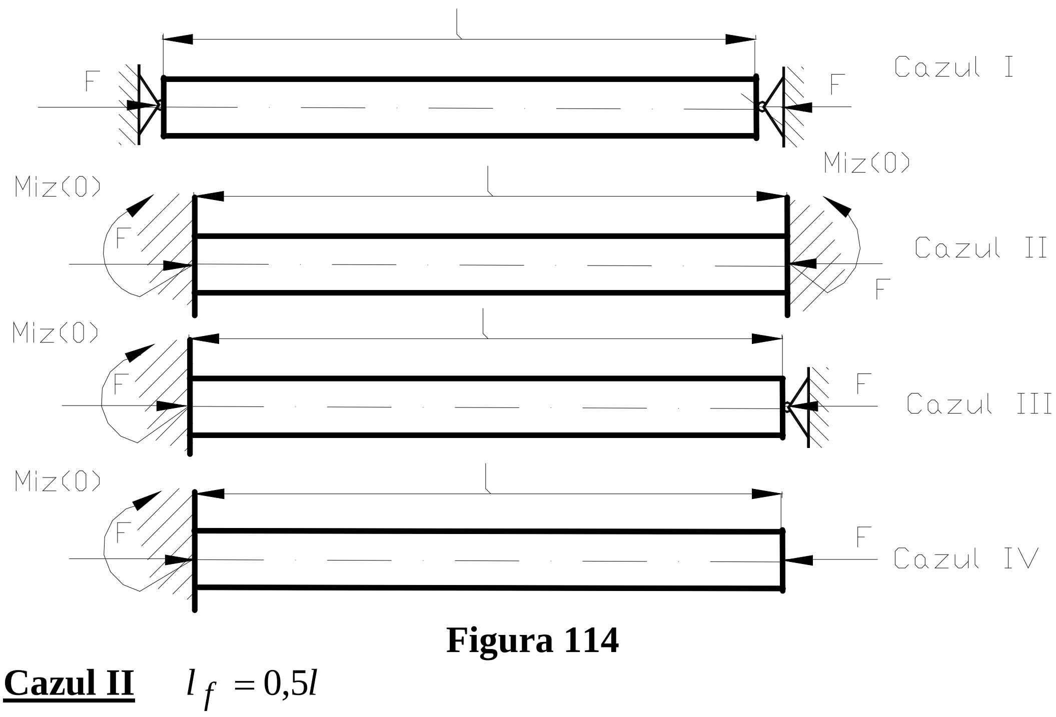


Figura 114

Cazul II $l_f = 0{,}5l$

Cazul III $l_f = \dfrac{l}{\sqrt{2}} = 0{,}707.l$

Cazul IV $l_f = 2l$

7.3. Limita de valabilitate a formulei lui Euler. Flambajul în zona elastică şi în zona plastică

La flambaj, se consideră că eforturile unitare de compresiune sunt uniform repartizate pe secţiune. Împărţind forţa critică de flambaj la aria secţiunii, rezultă valoarea efortului unitar critic de flambaj.

$$\sigma_f = \frac{P_f}{A} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_f^2 A}; i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$$

$$\sigma_f = \frac{\pi^2 E A i^2_{min}}{l_f^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\dfrac{l_f}{i_{min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

unde i_{min} este raza de inerţie minimă ; de aici va rezulta :

$\lambda = \dfrac{l_f}{i_{min}}$ fiind raportul dintre lungimea de flambaj şi raza de inerţie minimă a secţiunii, poartă denumirea de coeficient de subţirime sau coeficient de zvelteţe. Deci efortul unitar critic de flambaj, depinde de proprietăţile elastice ale materialului (E) şi de coeficientul de zvelteţe λ, unde λ depinde de dimensiunile şi forma barei. Atingerea tensiunii normale de flambaj σ_f antrenează după sine o schimbare radicală a noţiunii de rezistenţă. Pentru σ_f trebuie să stabilim un alt punct de vedere, decât cel de rezistenţă, tensiunea normală σ_f reprezintă pentru bara comprimată acelaşi pericol ca şi atingerea stării limită pentru tensiunea normală la solicitarea de compresiune, deoarece acest efort unitar se obţine pentru valoarea critică a sarcinii. În sistemul de coordonate $[\sigma_f, 0, \lambda]$ formula lui Euler reprezintă o hiperbolă cubică, având ca asimptotă orizontală axa 0λ care are

ecuaţia $(\sigma_f = 0)$. Din figura 115 rezultă că atunci când λ scade σ_f creşte.

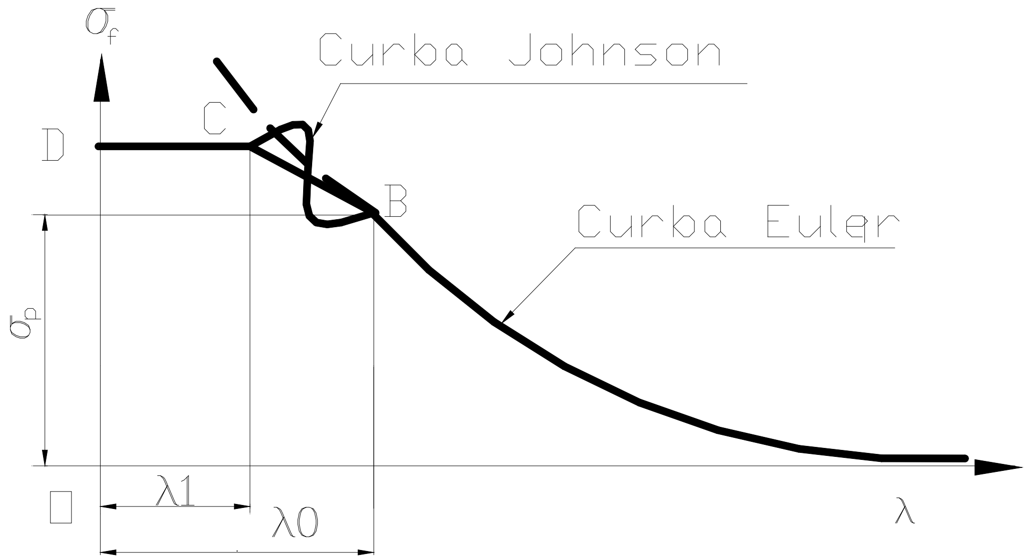


Figura 115

În punctul (B), σ_f atinge limita de proporţionalitate rezultând o valoare λ_0 pentru coeficientul de zvelteţe, care pentru unele materiale se confundă cu limita de elasticitate.

Pentru valori mai mici decât λ_0 pierderea stabilităţii apare pentru valori ale efortului unitar σ_f superioare limitei de elasticitate şi acest domeniu se numeşte flambaj elasto-plastic. În acest domeniu nu sunt valabile formulele lui Euler. Domeniul elasto-plastic a fost studiat de către Tetmayer-Iasinski , Johnson şi alţii, au demonstrat că în acest domeniu nu mai sunt valabile aceste formule ale lui Euler. Formulele lui Euler sunt valabile numai pentru $\lambda > \lambda_0$. Se poate calcula valoarea lui λ_0 pentru anumite oţeluri. Când

$$\sigma_p = 200\frac{N}{mm^2}; E = 2{,}1*10^5\frac{N}{mm^2} \quad ; \quad \sigma_f = \frac{\pi^2}{\lambda_0^2}E \quad ; \quad \sigma_f = \sigma_p \quad ;$$

$$\sigma_p = \frac{\pi^2}{\lambda_0^2}E \quad ; \quad \lambda_0^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_p} \quad ; \lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} \quad ;$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 * 2{,}1 * 10^5 \frac{N}{mm^2}}{200 \frac{N}{mm^2}}} = 102 \ ; \ \lambda_0 = 102$$

Pentru calculul tensiunii normale critice din domeniul elasto-plastic se folosesc formule stabilite pe baza datelor experimentale.
Tetmayer-Iasinski au aproximat porţiunea BC cu o dreaptă de ecuaţie $\sigma_f = a - b\lambda$, unde (a) şi (b) sunt coeficienţi obţinuţi prin încercări experimentale pentru fiecare material în parte. În acelaşi domeniu, porţiunea B-C a fost aproximată cu o parabolă :
$\sigma_f = \sigma_c\left(1 - b_1\lambda + b_2\lambda^2\right)$ de către Johnson , σ_c fiind tensiunea normală de rupere la compresiune.
Câteva relaţii de calcul pentru calculul tensiunii normale critice pentru domaniul elasto-plastic:

$\sigma_f = (310 - 1{,}14\lambda) \left[\frac{N}{mm^2}\right]$, pentru oţel foarte moale $\lambda \in [10{,}105]$

$\sigma_f = (335 - 0{,}62\lambda) \left[\frac{N}{mm^2}\right]$ pentru oţel moale şi $\lambda < 90$

$\sigma_f = (470 - 2{,}3\lambda) \left[\frac{N}{mm^2}\right]$ pentru oţel aliat cu nichel şi $\lambda < 86$.

Dacă se trece din domeniul elasto-plastic în domeniul plastic, adică λ va tinde la zero

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma_f(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} \sigma_c\left(1 - b_1\lambda + b_2\lambda^2\right) = \sigma_c \quad ; \quad \sigma_f = \sigma_c$$

Deci distrugerea piesei nu se mai produce prin pierderea stabilităţii, ci prin depăşirea tensiunii normale la compresiune. Valoarea maximă a coeficientului de zvelteţe din domeniul plastic s-a notat cu λ_1. Piesele solicitate la compresiune în funcţie de coeficientul de zvelteţe se disting trei genuri de formule de calcul şi anume :

-pentru $\lambda > \lambda_0$, se folosesc formulele lui Euler pentru că ne aflăm în domeniul elastic;

-pentru $\lambda \in (\lambda_1;\lambda_0]$, adică pentru domeniul elasto-plastic, se folosesc formule empirice ;

-pentru $\lambda < \lambda_1$, adică pentru domeniul plastic se folosesc formule de calcul de la compresiune, în general $\lambda_1 = 20$.

7.4. Calculul de rezistenţă la flambaj

În funcţie de modul de construcţie calculul de rezistenţă la flambaj se face în două feluri, şi anume :

1) – calculul de flambaj pentru piesele de maşini
2) - calculul de flambaj pentru construcţiile metalice.

7.4.1. Calculul de rezistenţă la flambaj pentru piesele de maşini

Respectând modul de calcul de rezistenţă se face calculul de dimensionare şi de verificare. Calculul de dimensionare se face prin încercări , pentru că nu ştim în ce domeniu ne aflăm din cele trei existente. Se presupune iniţial că piesa este în domeniul elastic , având o valoare pentru coeficientul de siguranţă, care în domeniul construcţiei de maşini variază într-un interval destul de mare, între [3 ;30]

şi din formula : $F_a = \dfrac{F_f}{c} = \dfrac{\pi^2 EI_{min}}{cl_f^2}$ se calculează $I_{min} = \dfrac{F_a . c . l_f^2}{\pi^2 E}$

c_{impus} = c = coeficientul de siguranţă;

F_a = forţa admisibilă . Cunoscând forma secţiunii transversale, putem afla dimensiunile acestuia. Având dimensiunile secţiunii transversale se calculează λ.

Cazul I

Dacă $\lambda_{cal} > \lambda_0$ dimensionarea a fost făcută bine cu formula lui Euler.

Cazul II

$\lambda_{cal} < \lambda_0$, dimensionarea trebuie făcută din nou, folosind formulele de calcul din domeniul elasto-plastic. În domeniul elasto-plastic se procedează astfel :

-se calculează $\sigma_f = a - b\lambda$

-se calculeaz a σ_{cefi} la compresiunea simplă prin adoptarea dimensiunilor pentru secţiunea transversală;

-se verifică coeficientul de siguranţă $c_{calculat} = \dfrac{\sigma_f}{\sigma_{cef}}$.

Acest procedeu se repetă până când coeficientul de siguranţă calculat se obţine egal sau mai mare sau egal decât coeficientul de siguranţă impus din problemă.

<u>Calculul de verificare</u>

Ştiind forma şi dimensiunile secţiunilor transversale se calculează coeficientul de zvelteţe λ_{cal} şi în funcţie de valoarea lui vom folosi formulele de calcul din domeniul elastic sau elasto-plastic :

1) $\lambda_{cal} > \lambda_0$, se folosesc formulele lui Euler.

2) $\lambda_{cal} < \lambda_0$ se foloseşte una din formulele empirice din domeniul elasto-plastic . La flambaj a verifica înseamnă a calcula coeficientul de siguranţă cu formula : $c_{calculat} = \dfrac{\sigma_f}{\sigma_c} \geq c_{impus} = c$ deci bara nu flambează, iar când $c_{calculat} = \dfrac{\sigma_f}{\sigma_c} < c_{impus} = c$; bara flambează deci nu verifică.

<u>Problema nr. 1</u>

Să se dimensioneze o tijă de oţel cu secţiunea din figura 116 , încastrată la un capăt şi articulată la celălalt, având lungimea l=1,82m; comprimată cu forţa F=205 kN. Se dau c_{impus} = c =4 , $\lambda_0 = 105$, $\sigma_c = 210 MP_a$, $E = 2{,}1 * 10^5 MP_a$, iar pentru flambajul în zona

elasto-plastică $\sigma_f = 304 - 1{,}12\lambda[MP_a]$. Lungimea de flambaj a tijei

$l_f = \frac{\sqrt{2}}{2} * 1{,}82m = 1{,}286934m$; $l_f = 1{,}286934m$.

Se calculează momentul de inerţie cu formula lui Euler, presupunem că ne aflăm în domeniul elastic.

$$I_z = \frac{F * c * l_f^2}{\pi^2 * E} = \frac{205KN * 4 * (1{,}286934)^2 m^2}{\pi^2 * 2{,}1 * 10^5 MP_a} =$$

$$= \frac{205 * 10^3 N * 4 * (1{,}286934)^2 * 10^6 mm^2}{\pi^2 * 2{,}1 * 10^5 \frac{N}{mm^2}} = 65{,}591538 * 10^4 mm^4$$

$$I_y = 65{,}591538 * 10^4 mm^4 ; I_y = \frac{(2a)^3 * 4a}{12} - \frac{\pi a^4}{64} = I_{min}$$

$$I_y = I_{min} = a^4\left[\frac{8*4}{12} - \frac{\pi}{64}\right] = a^4\left[\frac{8}{3} - \frac{\pi}{64}\right]$$

$I_{min} = a^4[2{,}66 - 0{,}049063] = 2{,}617604a^4$; $I_{min} = I$;

$2{,}617604a^4 = 65{,}591538 * 10^4 mm^4$;

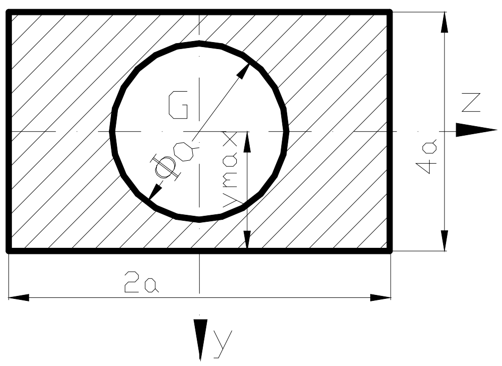


Figura 116

$a = \sqrt[4]{\frac{65{,}591538 * 10^4}{2{,}617604}} = 22{,}37mm$; a =23 mm

Se calculează raza de inerţie : $i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{2{,}617604a^4}{7{,}215a^2}} = 0{,}602329a$

; $A = 4a * 2a - \frac{\pi a^2}{4} = a^2\left[8 - \frac{\pi}{4}\right]$

$A = a^2[8 - 0{,}785] = 7{,}215a^2$;

$i = 0{,}602329 * 23mm = 13{,}853567mm$

Se calculează coeficientul de zvelteţe (de subţirime) :

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} = \frac{1{,}286934 * 10^3 mm}{13{,}853567mm} = 92{,}895 < \lambda_0$$

Deoarece $\lambda < \lambda_0$, dimensionarea cu formula lui Euler nu este bună, folosim Tetmayer-Iasinski:

$$\sigma_f = 304 - 1{,}12\lambda = 304 - 1{,}12 * 92{,}895 = 304 - 104{,}0424 = = 199{,}9576MP_a \quad ;$$

$\sigma_f = 199{,}9576MP_a$;

Se calculează efortul unitar la compresiune :

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{205 * 10^3 N}{3816{,}735mm^2} = 53{,}710829MP_a \quad ;$$

$A = 7{,}215a^2 = 7{,}215 * 23^2 = 3816{,}735mm^2$

Se calculează coeficientul de siguranţă la flambaj :

$$c_{calculat} = \frac{\sigma_f}{\sigma} = \frac{199{,}9576MP_a}{53{,}710829MP_a} = 3{,}722 < 4 \quad ; \quad c_{calculat} < c_{impus} = c = 4 \quad ;$$

Se măreşte **(a)** apoi se calculează $c_{calculat}$ până când $c_{calculat} \geq c_{impus} = 4$; Se ia $a = 25mm$;

$i = 0{,}602329a = 0{,}602329 * 25mm = 15{,}058225mm$;

$A = 7{,}215a^2 = 7{,}215 * 25^2 mm^2 = 4509{,}375mm^2$;

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} = \frac{1,286934 * 10^3 mm}{15,058225 mm} = 85,463858$$; Se recalculează :

$$\sigma_f = 304 - 1,12 * 85,463858 = 208,280479 MP_a$$;

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{205 * 10^3 N}{4509,375 mm^2} = 45,460845 MP_a$$;

$$c = \frac{\sigma_f}{\sigma} = \frac{208,280479 MP_a}{45,460845 MP_a} = 4,581536 > 4$$; deci a = 25mm

rezultă că dimensionarea este bună.

Problema nr. 2

Să se determine diametrul interior al şurubului unui cric prin calculul la flambaj, dacă sarcina maximă de ridicare este de 125 KN, lungimea l = 781 mm şi se consideră liber la un capăt şi încastrat la celălalt . Se dau : c_{impus} = c = 3,8 ; $\lambda_0 = 105$; $E = 2,1 * 10^5 MP_a$;

$\sigma_f = 304 - 1,12\lambda$ [MPa] ; $\sigma_c = 235 MP_a$; lungimea de flambaj $l_f = 2l = 2 * 781 mm$; $l_f = 1562 mm$;

Folosind formula lui Euler (din domeniul elastic) , se obţine :

$$I_{\min} = \frac{F.c.l_f^2}{\pi^2 E} = \frac{125.10^3 N.3,8.(1562mm)^2}{\pi^2 \frac{2,1.10^5 N}{mm^2}} = 559728,0581 mm^4$$

$$I_{\min} = \frac{\pi d^4}{64} \quad ; \quad d = \sqrt[4]{\frac{64 I_{z\min}}{\pi}} \quad ;$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 * 559728,0581 mm^4}{\pi}} = \sqrt[4]{11 * 408 * 469,97} = 58,11 \quad ;$$

$d = 59 mm$; raza de inerţie :

$$i=\sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}=\sqrt{\frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{\pi d^2}{4}}}=\sqrt{\frac{d^2}{16}}=\frac{d}{4}\quad;\quad i_{\min}=\frac{59mm}{4}=14{,}75mm\quad;$$

Coeficientul de zvelteţe :

$$\lambda=\frac{l_f}{i_{\min}}=\frac{1562mm}{14{,}75mm}=105{,}898>105$$ dimensionarea cu formula lui Euler este bună, suntem în domeniul elastic.

Problema nr. 3.

La filetarea de degroşare a unui şurub din OL 37 , lung de 1,21 m şi cu diametrul d= 35 mm, apare o componentă axială a forţei de aşchiere F= 1,785 KN. Să se verifice la flambaj acest şurub. Bara se consideră încastrată la un capăt şi articulată în celălalt.

Se dau $\lambda_0=105$; c_{impus} = c = 8 ; $\sigma_f=304-1{,}12\lambda[MP_a]$;

$\sigma_c=240MP_a$; $E=2{,}1*10^5 MP_a$

$$i=\frac{d}{4}=\frac{35mm}{4}=8{,}75mm\quad;\quad i=8{,}75mm\quad;$$

$$l_f=\frac{\sqrt{2}}{l}*l=\frac{\sqrt{2}}{2}*1{,}21m=0{,}855599m$$

Coeficientul de subţirime este :

$$\lambda=\frac{l_f}{i}=\frac{855{,}599mm}{8{,}75mm}=97{,}782743<105$$; Efortul unitar critic de flambaj se calculează cu formula lui Tetmayer-Iasinski :

$\sigma_f=304-1{,}12\lambda$; $\lambda=97{,}782743$;

$\sigma_f=304-1{,}12*(97{,}782743)=194{,}483328MP_a$; Efortul unitar la compresiune este :

$$\sigma=\frac{F}{A}=\frac{1{,}785KN}{\frac{\pi}{4}*(35)^2mm^2}=1{,}856233MP_a$$. Coeficientul de siguranţă la flambaj este :

$$c_{calculat} = \frac{\sigma_f}{\sigma} = \frac{194{,}483328MP_a}{1{,}856233MP_a} = 104{,}773123 \quad ;$$

$c_{calc} = 104{,}773123 > c_{impus} = 8$

În final şurubul nu flambează.

Problema nr. 4

O bară de oţel cu lungimea $l = 3{,}72m$, de secţiune circulară inelară cu D = 60 mm şi d = 30mm, este fixată rigid între doi pereţi masivi la temperatura $t_0 = 30^0 C$. Să se determine temperatura limită la care se poate încălzi bara fără să flambeze.

Se dau : coeficientul de dilatare liniară a barei $\alpha = 16 * 10^{-6} \left({}^0C \right)^{-1}$

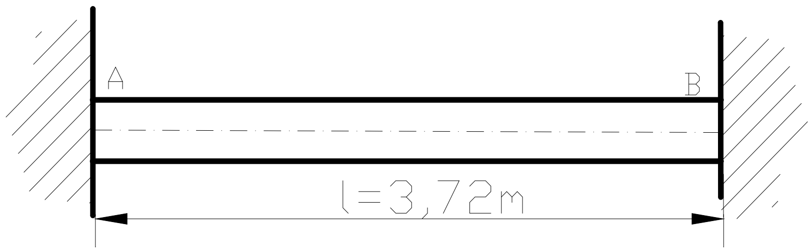


Figura 117

modulul de elasticitate longitudinal $E = 2{,}1 * 10^5 MP_a$ şi $\lambda_0 = 105$.

$$A = \frac{\pi}{4}\left(60^2 - 30^2\right)mm^2 = 10^2 * \frac{\pi}{4}(36 - 9) = 10^2 * \frac{\pi}{4} * 27mm^2 \quad ;$$

$$I_z = \frac{\pi}{64}\left(60^4 - 30^4\right) = \frac{\pi}{64} * 10^4\left(6^4 - 3^4\right) = \frac{\pi * 10^4}{64}(1296 - 81) \quad ;$$

$$I_y = I_z = 59{,}610938 * 10^4 mm^4 \quad ;$$

$$i = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{59{,}610938 * 10^4 mm^4}{2119{,}5mm^2}} = 16{,}7705mm \quad ;$$

$$l_f = \frac{l}{2} = \frac{3{,}72m}{2} = 0{,}167705 * 10^2 mm \quad ;$$

$i = 16{,}7705 mm$; $l_f = 1{,}86 m = 1{,}86 * 10^3 mm$;

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} = \frac{1{,}86 * 10^3 mm}{16{,}7705 mm} = 110{,}909037 > \lambda_0 = 105$$

Suntem în domeniul elastic, calculul sarcinii critice se face folosind formula lui Euler. Efortul unitar la dilatarea împiedicată a unei bare este : $\sigma = E.\alpha.\Delta t$; $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_0.\alpha.\Delta t}{l_0} = \alpha.\Delta t$; $\Delta l = l_0.\alpha.\Delta t$;

$\varepsilon = \alpha \Delta t$; $\sigma = E.\varepsilon$; $\sigma = E\alpha\Delta t$; $\sigma_f = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$;

Pentru determinarea temperaturii la care se produce pierderea stabilităţii elastice a barei, se scrie că acest efort este egal cu efortul unitar critic de flambaj şi rezultă : $E\alpha\Delta t = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$;

$$\Delta t = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 E\alpha} = \frac{\pi^2}{\lambda^2 \alpha} = \frac{\pi^2}{110{,}909037^2 * 16 * 10^{-6} \left({}^0C\right)^{-1}} \;;$$

$\Delta t = 50{,}096276^0 C$; temperatura limită la care poate fi încălzită este : $t = t_0 + \Delta t = 30^0 C + 50{,}096276^0 C$; $t = 80{,}096276^0 C$.

7.4.2. Calculul de rezistenţă la flambaj în construcţii metalice

În construcţiile metalice se folosesc laminate standardizate şi executate din oţel moale OL 37. La flambaj se foloseşte o metodă generală , numită metoda coeficientului de flambaj. Făcând un studiu al acestui calcul , destinat normelor de calcul pentru construcţii metalice, pentru $\lambda > 105$, un coeficient de siguranţă $c = 2{,}4$; iar pentru $\lambda = 20$ se calculează un coeficient de siguranţă $c = \frac{\sigma_c}{\sigma_{ac}} = \frac{2400 MP_a}{1400 MP_a} = 1{,}714$. Pentru a calcula coeficientul de siguranţă pentru $\lambda = 20$, s-a admis că σ_f a atins limita de curgere la

compresiune, iar σ_{ac} efortul unitar admisibil la compresiune. În domeniul elasto-plastic $\lambda \in [20{,}105]$ şi coeficientul de siguranţă $c \in [1{,}714;2{,}4]$; σ_f în acest domeniu are o variaţie eliptică .

$\sigma_f = 177{,}08 + 0{,}70178\sqrt{7515 - (\lambda - 20)^2}\,[MP_a]$; cu $\sigma_{af} = \dfrac{\sigma_f}{c}$

σ_{af} ; tensiunea admisibilă la flambaj. Dimensionarea pieselor se face cu formula : $A_{nec} = \dfrac{F}{\sigma_{af}}$. Cum σ_{af} fiind o mărime variabilă, se introduce noţiunea de coeficient de flambaj şi anume : $\varphi = \dfrac{\sigma_{af}}{\sigma_{ac}} < 1$

şi dimensionarea devine $A_{nec} = \dfrac{F}{\varphi.\sigma_{ac}}$, iar pentru verificare $\sigma_{ef} = \dfrac{F}{\varphi.A} \le \sigma_{ac}$; unde σ_{ac} fiind tensiunea normală admisibilă la compresiune . Această metodă este folosită în Rusia şi poartă denumirea de metoda φ , iar standardele germane folosesc aşa- numitul " multiplicatorul de flambaj " , care este inversul lui φ

; $\omega = \dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{\sigma_{ac}}{\sigma_{af}} > 1$ şi relaţia de calcul devine $\sigma_{ef} = \dfrac{\omega.F}{A} \le \sigma_{ac}$. Cu ajutorul acestei metode se calculează cu aceleaşi formule în cele două domenii (elastic, elasto-plastic). În schimb , pentru dimensionare se fac încercări :

-se adoptă o valoare pentru λ şi din tabel se ia valoarea lui φ ;

-având pe φ se face dimensionarea ;

-funcţie de valoarea calculată a lui t din standardele pentru laminate se adoptă o secţiune standardizată ;

-se recalculează λ , respectiv φ şi se verifică tensiunea normală efectivă ;

-în cazul în care dă o diferenţă mare între tensiunea normală efectivă şi cea admisibilă , calculul se reia adoptând o valoare intermediară

pentru λ între cea adoptată iniţial şi cea recalculată. Calculul se repetă până se ajunge la o valoare a lui σ_f apropiată de σ_{ac}.

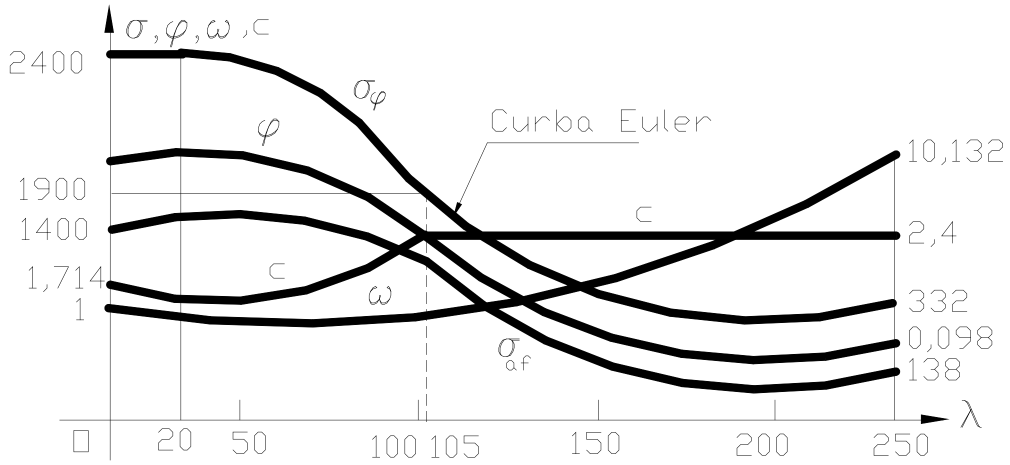


Figura 118

Coeficienţii de flambaj φ pentru OL 37

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	1	0.996	0.991	0.986	0.981	0.976	0.971	0.967	0.962	0.957
30	0.953	0.948	0.944	0.939	0.935	0.931	0.926	0.921	0.916	0.912
40	0.907	0.902	0.898	0.894	0.889	0.884	0.879	0.875	0.871	0.866
50	0.862	0.857	0.853	0.849	0.844	0.840	0.835	0.830	0.825	0.821
60	0.817	0.812	0.807	0.803	0.798	0.794	0.789	0.785	0.780	0.775
70	0.771	0.766	0.761	0.757	0.752	0.748	0.743	0.738	0.733	0.728
80	0.723	0.718	0.713	0.708	0.703	0.698	0.693	0.688	0.683	0.677
90	0.672	0.666	0.661	0.655	0.649	0.643	0.637	0.631	0.624	0.617
100	0.610	0.602	0.593	0.583	0.572	0.561	0..550	0.539	0.528	0.519
110	0.510	0.501	0.491	0.483	0.474	0.466	0.458	0.451	0.444	0.436
120	0.428	0.421	0.411	0.407	0.401	0.395	0.389	0.383	0.377	0.371

130	0.365	0.359	0.354	0.349	0.344	0.339	0.334	0.329	0.324	0.319
140	0.314	0.310	0.307	0.302	0.297	0.293	0.289	0.285	0.281	0.278
150	0.274	0.271	0.267	0.264	0.260	0.257	0.254	0.250	0.247	0.244
160	0.240	0.238	0.235	0.232	0.229	0.226	0.224	0.221	0.218	0.216
170	0.213	0.211	0.208	0.206	0.204	0.201	0.199	0.197	0.195	0.193
180	0.190	0.188	0.186	0.184	0.182	0.180	0.178	0.176	0.174	0.172
190	0.170	0.168	0.167	0.165	0.163	0.161	0.160	0.158	0.157	0.155
200	0.154	0.152	0.151	0.150	0.148	0.147	0.145	0.143	0.142	0.141
210	0.140	0.138	0.137	0.135	0.134	0.133	0.132	0.130	0.129	0.128
220	0.127	0.126	0.125	0.124	0.122	0.121	0.120	0.119	0.118	0.117
230	0.116	0.115	0.114	0.113	0.112	0.111	0.110	0.109	0.108	0.107
240	0.107	0.106	0.105	0.104	0.103	0.102	.0102	0.101	0.100	0.099
250	0.098	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Coeficienţii de flambaj φ pentru lemn şi fontă

λ	lemn	fontă	λ	lemn	fontă
0	**1**	**1**	**80**	**0.48**	**0.26**
10	**0.99**	**0.97**	**90**	**0.38**	**0.20**
20	**0.97**	**0.91**	**100**	**0.30**	**0.16**
30	**0.93**	**0.81**	**110**	**0.25**	**-**
40	**0.87**	**0.69**	**120**	**0.22**	**-**
50	**0.80**	**0.57**	**130**	**0.18**	**-**
60	**0.71**	**0.44**	**140**	**0.16**	**-**
70	**0.61**	**0.34**	**150**	**0.14**	**-**

Problema nr. 5

Ce forţă de compresiune poate suporta o bară din profil cornier cu aripi egale 45x45x6 , de lungime $l = 1,978 m$, încastrată la ambele capete, pentru un coeficient de siguranţă $c_{impus} = c = 2,2$.

$\sigma_{ac} = 140 \dfrac{N}{mm^2} = 140 MP_a$; Forţa de compresiune se calculează folosind metoda (φ) : $l_f = \dfrac{l}{2} = \dfrac{1{,}978}{2} = 0{,}989m$; $l_f = 989mm$;

$i_{\min} = 0{,}87cm = 8{,}7mm$;

$\lambda = \dfrac{l_f}{i_{\min}} = \dfrac{989mm}{8{,}7mm} = 113{,}678161$; $\varphi = 0{,}474$; $\varphi \in [0{,}483; 0{,}474]$

a) Din metoda φ rezultă :

$F = \varphi.A.\sigma_{ac} = 0{,}474 * 508mm^2 * 140 \dfrac{N}{mm^2} = 33710{,}88N$;

$A = 5{,}08cm^2 = 5{,}08 * 10^2 mm^2 = 508mm^2$; $F = 33{,}71088KN$

b)Cu ajutorul formulei lui Euler se obţine:

$$F = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{cl_f^2} = \frac{\pi^2 * 2{,}1 * 10^5 \dfrac{N}{mm^2} * 3{,}82 * 10^4 mm^4}{2{,}2 * (989mm)^2}$$ = 37 000 N = 37 k N

$I_{\min} = 3{,}82cm^4 = 3{,}82 * 10^4 mm^4$; $F = 37 * 10^3 N = 37kN$

Deci (a) şi (b) dau valori apropiate pentru forţa de compresiune.

Problema nr. 6

O bară , profil I , de lungime $l = 2{,}217m$, articulată la ambele capete, este solicitată la compresiune de o forţă axială $F = 99{,}5KN$.

Să se dimensioneze bara pentru $\sigma_{ac} = 140 \dfrac{N}{mm^2}$.

Metoda φ : $A_{nec} = \dfrac{F}{\varphi \sigma_{ac}}$; Deoarece nu se cunoaşte φ , se ia un $\lambda = 85$ la întâmplare , avem $\varphi = 0{,}698$ şi deci

$$A_{nec} = \frac{99{,}5 * 10^3 N}{0{,}698 * 140 \frac{N}{mm^2}} = 1018{,}215 mm^2$$ şi se ia I_{10}

$I_y = I_{\min} = 12{,}2 * 10^4 mm^2 ; A = 10{,}6.10^2 mm^2$;

$i_{\min} = i_y = 1{,}07 cm = 10{,}7 mm$.

Verificăm coeficientul de zvelteţe :

$\lambda = \dfrac{l_f}{i_{\min}} = \dfrac{2{,}217 * 10^3 mm}{107 mm} = 207{,}196$; $l_f = l = 2{,}217 m$. Deoarece λ a ieşit prea mare, se ia o valoare intermediară pentru $\lambda = 150$.

$$A_{nec} = \frac{F}{\varphi \sigma_{ac}} = \frac{99{,}5 * 10^3 N}{0{,}274 * 140 \frac{N}{mm^2}} = 2593{,}847758 mm^2$$

$\varphi = 0{,}274$ se ia I_{18} : $I_y = I_{\min} = 81{,}3 * 10^4 mm^4$;

$i_{\min} = i_y = 17{,}1 mm$; $A = 27{,}9 * 10^2 mm^2$;

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} = \frac{2{,}217 * 10^3 mm}{17{,}1 mm} = 129{,}649123$$

Diferenţa dintre $\lambda = 150$ adoptat şi $\lambda_{calc} = 129{,}64$ cel calculat nu este prea mare şi verificăm tensiunea normală din bară , adică

$\sigma_{cef} = \dfrac{99{,}5 * 10^3 N}{0{,}365 * 27{,}9 * 10^2 mm^2} = 97{,}70 MP_a < 140 MP_a$; $\varphi = 0{,}365$, deci rămâne I_{18} .

Capitolul VIII

Solicitări dinamice prin şoc

Solicitarea prin şoc se produce când asupra unui corp intervine o variaţie bruscă de viteză . Şocul este urmarea contactului între corpuri, produs într-un timp extrem de scurt, în urma şocului, se produce o forţă de contact foarte mare, greu de evaluat. Între cele două suprafeţe de contact se produc eforturi unitare locale foarte mari, urmate, de obicei, de apariţia unor deformaţii permanente, şocul se propagă cu efect mai redus în toată masa corpurilor ce se lovesc.

Se caută o asimilare a solicitării prin şoc cu o solicitare statică, prin considerente energetice, această metodă are o marjă de aproximare în asimilarea solicitărilor dinamice cu cele statice.

8.1. Solicitarea la întindere sau compresiune prin şoc .

Dacă avem o bară de lungime l şi de secţiune transversală A, din figura 119 în lungul căreia cade o placă de greutate F de la o înălţime h. Greutatea F, căzând de la înălţimea h , loveşte opritorul (O), se produce în acel moment solicitarea la întindere prin şoc în urma căreia bara suferă o lungire δ. Se porneşte de la principiul conservării energiei, anume, energia cinetică a greutăţii (F) se transformă în lucrul mecanic elastic de deformaţie înmagazinat de bară, produs ca urmare a acţiunii forţei (F). $L_1 = F(h+\delta)$ enrgia cinetică care este egală cu energia potenţială. Energia potenţială de deformaţie

$$L_2 = \frac{EA\delta^2}{2l} \quad ; \quad L_2 = \frac{\sigma\varepsilon}{2} Al = \frac{E\varepsilon^2}{2} Al \quad ; \quad \sigma = E\varepsilon \quad ; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\delta}{l} \quad ;$$

$$L_2 = \frac{E}{2} Al * \frac{\delta^2}{l^2} = \frac{EA\delta^2}{2l} \quad ; \text{ Dar } \quad L_1 = L_2 \quad ;$$

$$F(h+\delta) = \frac{EA\delta^2}{2l} \quad ; \quad EA\delta^2 = 2Fhl + 2lF\delta \quad ;$$

$EA\delta^2 - 2Fl\delta - 2Fhl = 0$ necunoscută fiind δ săgeata dinamică.

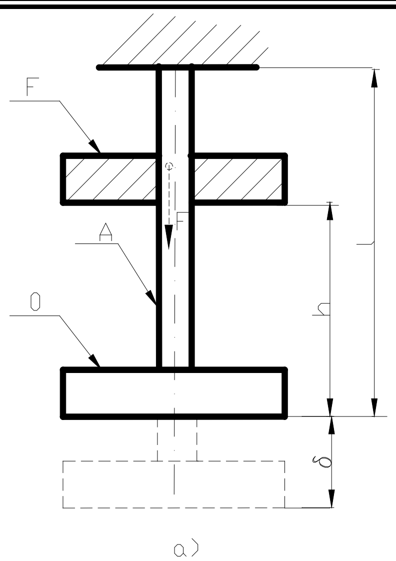


Figura 119

$$\delta_{1,2} = \frac{Fl \pm \sqrt{F^2l^2 + 2FhlEA}}{EA} = \frac{Fl}{EA} \pm \sqrt{\frac{F^2l^2}{E^2A^2} + \frac{2FhlEA}{E^2A^2}} = = \frac{Fl}{EA} \pm \sqrt{\left(\frac{Fl}{EA}\right)^2 + 2h\frac{Fl}{EA}}$$

; se ia numai δ cu (+) , cea cu minus dă soluţii negative, deci ar fi compresiune, ceea ce nu ar corespunde realităţii. $\delta = \frac{Fl}{EA} + \sqrt{\left(\frac{Fl}{EA}\right)^2 + 2h * \frac{Fl}{EA}}$; Dar aplicând pe (F) static ca în figura 120 : $\delta_S = \frac{Fl}{EA}$

$$\delta = \delta_s + \sqrt{\delta_s + 2h\delta_s} = \delta_s\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_s}}\right)$$

unde expresia $\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_S}}\right) = \psi$, se notează cu ψ şi se numeşte multiplicator de impact sau multiplicator de ciocnire.

$\delta = \psi.\delta_S$.

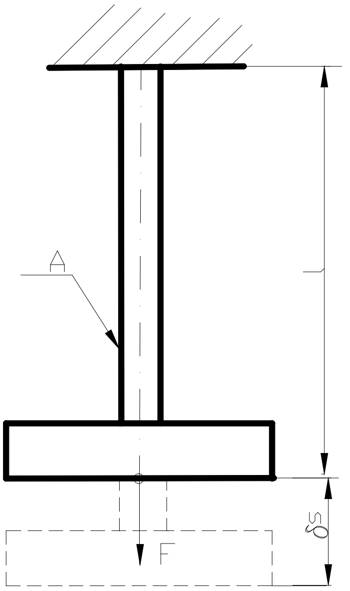


Figura 120

Multiplicatorul de impact ψ are valori foarte mari, δ_s sunt foarte mici şi în acest caz : $\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_s}}$, se ia $\psi = \sqrt{\frac{2h}{\delta_s}}$, se neglijează ceilalţi termeni ai lui ψ . În cazul când în loc de înălţimea h , se dă viteza v a şocului , se obţine :

$$v^2 = 2gh \quad ; \quad h = \frac{v^2}{2g} \quad ;$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2v^2}{2g} * \frac{1}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{st}}}$$; în mod analog se obţine

$$\sigma_d = \psi\sigma_{st} = \frac{F}{A}\psi \quad ; \quad \sigma_a = \frac{F}{A}\sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}} = \frac{F}{A}\sqrt{\frac{2h}{\frac{Fl}{EA}}} \quad ;$$

$$\sigma_a^2 = \frac{F^2}{A^2} * EA * \frac{2h}{Fl} = \frac{F}{A} * \frac{2hE}{l} \quad ; \quad (Al)_{nec} = \frac{2FEh}{\sigma_a^2} \ .$$

La dimensionare, intervine volumul barei $V = Al$, cu cât volumul este mai mare cu atât rezistă mai mult la solicitarea dinamică prin şoc.

Dacă se ţine seama că : $\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}$;

$\psi^2 = 1 + 1 + \frac{2h}{\delta_{st}} + 2\sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}$; $\psi^2 = 2 + \frac{2h}{\delta_{st}} + 2\sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}$ Neglijând

$2\sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}$, $\psi^2 = 2\left(1 + \frac{h}{\delta_{st}}\right)$; $\sigma_a = \psi \frac{F}{A}$; $\sigma_a^2 = \psi^2 \frac{F^2}{A^2}$;

$\sigma_a^2 A^2 = \psi^2 F^2$; $\delta_{st} = \frac{Fl}{EA}$;

$$\sigma_a^2 A^2 = F^2 2\left(1 + \frac{h}{\frac{Fl}{EA}}\right) \quad ; \quad \sigma_a^2 A^2 = 2F^2 + 2F^2 \frac{EAh}{Fl} \quad ;$$

$$\sigma_a^2 A^2 - 2A * \frac{FEh}{l} - 2F^2 = 0 \quad ;$$

$$A_{1,2} = [\frac{FEh}{l} \pm \sqrt{\left(\frac{FEh}{l}\right)^2 + 2F^2\sigma_a^2}\,]\frac{1}{\sigma_a^2} \quad ;$$

$$A_{nec} = [\frac{FEh}{l} + F\sqrt{\left(\frac{Eh}{l}\right)^2 + 2\sigma_a^2}\,]\frac{1}{\sigma_a^2} \quad .$$

Un alt caz este atunci când sarcina se aplică brusc, de la înălţimea $h = 0$, $\phi = 2$. Deci efectul unei sarcini aplicate brusc, fără înălţime de cădere, este dublu decât cel al uneia aplicate static, adică cu mărimea crescând lent de la zero până la valoarea finală.

Problema nr. 1

Un stâlp de lemn, având dimensiunile din figura 121 şi de lungime $l = 4{,}752m$, este bătut cu un berbec de greutate $F = 4610N$,căzând de la înălţimea $h = 3{,}125m$ se dau : $E = 10^4 \frac{N}{mm^2}$

Să se calculeze efortul unitar produs în stâlp în urma loviturilor.

Rezolvare:

$$\sigma = \psi * \sigma_S = \frac{F}{A}\psi \quad ; \quad \sigma_S = \frac{F}{A} \quad ; \quad \psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_S}} \quad ;$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\frac{Fl}{EA}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hEA}{Fl}} \quad ;$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 * 3{,}125m * 10^4 \frac{N}{mm^2} * 48 * 25mm^2}{4610N * 4{,}752m}} = \quad ; \quad \psi = 59{,}520142 \quad ;$$

$$= 1 + \sqrt{1 + 3423{,}607003} = 59{,}520142$$

$$\sigma_{st} = \frac{F}{A} = \frac{4610N}{48 * 25mm^2} = 3{,}841667 \frac{N}{mm^2} \quad ; \quad \sigma_d = 228{,}656565MP_a$$

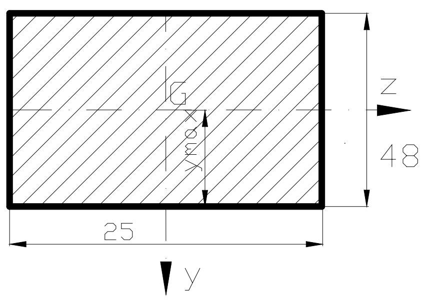


Figura 121

<u>Problema nr. 2</u>.

Problemă de compresiune prin şoc

O greutate P = 3465 N , cade de la înălţimea $h = 2{,}683m$ pe o bară cu secţiunea variabilă, având forma unui trunchi de piramidă, cu înălţimea $l = 1{,}28m$, iar bazele $A_1 = 130mm^2$ şi $A_2 = 468mm^2$.

$$E = 2{,}1 * 10^5 \frac{N}{mm^2} \quad .$$

Rezolvare:

Energia cinetică în momentul şocului este :

$E_c = L = Ph = 3465N * 2{,}683m$

$E_c = 3465N * 2{,}683 * 10^3 mm = 9296559Nmm$.

Energia cinetică este absorbită în întregime de corpul lovit.

$L = \int_l \frac{N^2 dx}{2EA} = \frac{N^2}{2E}\int_l \frac{dx}{A}$; N este forţa axială în momentul şocului.

Din teorema asemănării triunghiurilor vom obţine :

$\frac{A_1}{a^2} = \frac{A_2}{(a+l)^2} = \frac{A}{x^2}$; A = aria secţiunii transversale într-o secţiune curentă aflată la distanţa "x" faţă de capătul fictiv O.

$A = \frac{x^2}{(a+l)^2} A_2$; $L = \frac{N^2}{2E}\int_a^{a+l} \frac{dx}{\frac{x^2 A_2}{(a+l)^2}} = \frac{N^2}{2E}\frac{(a+l)^2}{A_2}\int_a^{a+l}\frac{dx}{x^2}$;

$$\int_a^{a+l}\frac{dx}{x^2} = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}\Big|_a^{a+l} = -\frac{1}{x}\Big|_a^{a+l} = -\left(\frac{1}{a+l} - \frac{1}{a}\right) = -\left(\frac{a-a-l}{a(a+l)}\right) =$$

$$= \frac{l}{a(a+l)}$$

$L = \frac{N^2}{2EA_2^2}(a+l)^2 * \frac{l}{a(a+l)} = \frac{N^2(a+l)l}{2EA_2 * a}$; $Ec = L$

$Ph = \frac{N^2(a+l)l}{2EA_2 a}$; $N = \sqrt{\frac{2PhEA_2 a}{(a+l)l}}$;

$$N = \sqrt{\frac{2 * 3465N * 2{,}683m * 2{,}1 * 10^5 \frac{N}{mm^2} * 468mm^2 * 1{,}426395m}{2{,}706395m * 1{,}28m}}$$

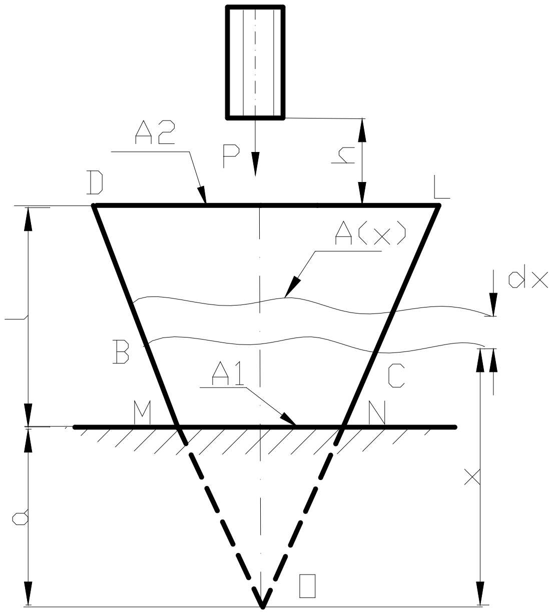


Figura 122

N = 867419 N ; $A_1 = \dfrac{a^2}{(a+l)^2} A_2$; $\dfrac{a^2}{(a+l)^2} = \dfrac{A_1}{A_2}$

; $\dfrac{a}{a+l} = \sqrt{\dfrac{A_1}{A_2}}$; $1 + \dfrac{l}{a} = \sqrt{\dfrac{A_2}{A_1}}$; $\dfrac{l}{a} = \sqrt{\dfrac{A_2}{A_1}} - 1$;

$$a = \frac{l}{\left(\sqrt{\dfrac{A_2}{A_1}} - 1\right)} = \frac{1{,}28m}{\left(\sqrt{\dfrac{468mm^2}{130mm^2}} - 1\right)} = \frac{1{,}28m}{0{,}897367} = 1{,}426395m \;;$$

$a + l = 1{,}426395m + 1{,}28m = 2{,}706395m$; $N = 867419N$;

Forţei axiale îi corespunde o tensiune maximă în secţiunea de arie A_1

. $\sigma_{\max} = \dfrac{N}{A_1} = \dfrac{N}{A_2}\left(\dfrac{a+l}{a}\right)^2$;

$$\sigma_{max} = \sqrt{\left(\frac{a+l}{a}\right)^4 * \frac{1}{A_2^2} * \frac{2PhEA_2a}{(a+l)l}} = \sqrt{\frac{2PhE}{A_2} * \left(\frac{a+l}{a}\right)^3 * \frac{1}{l}} = \frac{N}{A_1} =$$

$$= \frac{867 * 419N}{130mm^2} = 6672,453846MP_a;$$

$\sigma_{max} = 6672,453846MP_a$ foarte mare.

Dacă bara are un vârf ascuţit , adică $a = 0$ şi $A_1 = 0$, presiunea de contact va fi $\sigma_{max} = \sqrt{\frac{2PhE}{A_2 l}\left(1+\frac{l}{a}\right)^3}$;

$\frac{\lim}{a \to 0}\sigma_{max} = \infty$; $\frac{l}{0} \Rightarrow \infty$ şi de aceea se fac sculele pentru tăiere şi perforare având forma ascuţită

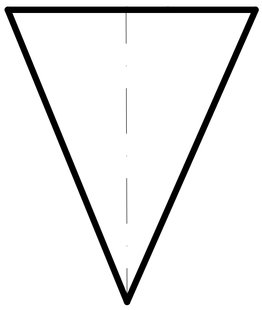


Figura 123

Problema nr. 3.

Tensiunea produsă prin ciocnire într-o bară, în cădere pe o placă rigidă

Se consideră o bară , de greutate P = 464,307 N şi de rigiditate EA cu $E = 2,1 * 10^5 \frac{N}{mm^2}$, $A = 148mm^2$ lungime $l = 2,163m$ şi greutate specifică $\gamma = 148\frac{Kgf}{dm^3}$, cade de la înălţimea h = 4,261 m , asupra unei plăci rigide (un exemplu practic fiind tija ciocanului de forjat la capătul cursei de forjare).

Rezolvare:
Atunci când se produce ciocnirea , bara posedă o energie cinetică $E_c = L = Ph$, care se transformă în întregime în energie de deformaţie. În capătul N al barei, tensiunea maximă de compresiune σ_{max} , este egală cu presiunea de contact, dar la capătul superior M tensiunea barei fiind egală cu zero, variaţia tensiunii fiind o funcţie liniară de variabilă x. $\sigma(x) = \frac{x}{l}\sigma_{max}$.

Energia potenţială de deformaţie a barei fiind : $L = \iiint\limits_V \frac{\sigma.\varepsilon}{2} dV$;

$$dV = Adx \quad ; \quad \sigma = \varepsilon E \quad ; \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad ; \quad L = \int\limits_{(l)} \frac{\sigma\varepsilon}{2} Adx \quad ;$$

$$L = \int\limits_{(l)} \frac{\sigma^2}{2E} Adx = \frac{A}{2E}\int\limits_{l} \sigma^2 dx = \frac{A}{2E}\int\limits_0^l \left(\frac{x}{l}\sigma_{max}\right)^2 dx = \frac{A}{2E}\frac{\sigma_{max}^2}{l^2}\int\limits_0^l x^2 dx \; ;$$

$$\int\limits_0^l x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^l = \frac{l^3}{3} \quad ; \quad L = \frac{A}{2E}\frac{\sigma_{max}^2}{l^2} * \frac{l^3}{3} = \frac{\sigma_{max}^2}{6E} Al \quad ; \quad Ec = L$$

$$Ph = \frac{\sigma_{max}^2}{6E} Al \quad ; \sigma_{max} = \sqrt{\frac{6EPh}{Al}} \quad ; \text{ dar am } \quad P = \gamma Al$$

$$\sigma_{max} = \sqrt{\frac{6E * \gamma Al * h}{Al}} = \sqrt{6E.\gamma h.} \quad ;$$

$$\sigma_{max} = \sqrt{6 * 2{,}1 * 10^5 \frac{N}{mm^2} * 148 \frac{Kgf}{dm^3} * 4{,}261 m} \; ;$$

$$\gamma = 148 \frac{Kgf}{dm^3} = 148 * \frac{9{,}8N}{10^6 mm^3} = 1450{,}4 * 10^{-6} \frac{N}{mm^3} .$$

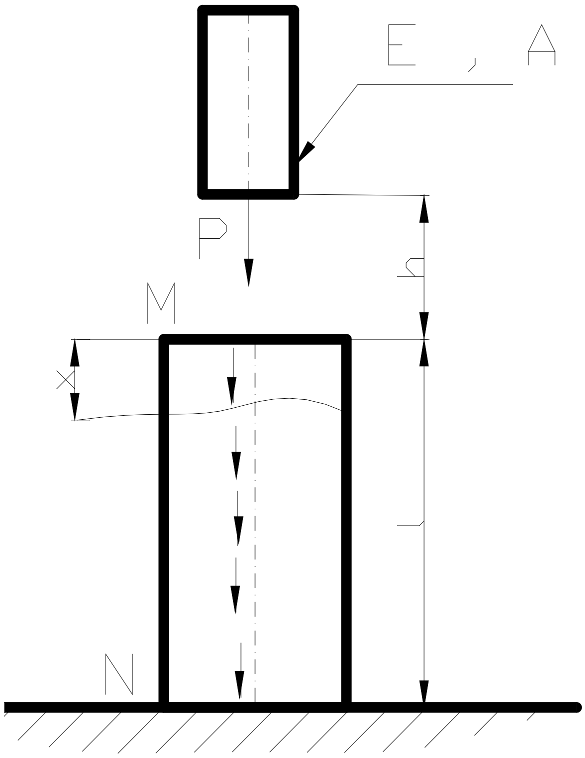


Figura 124

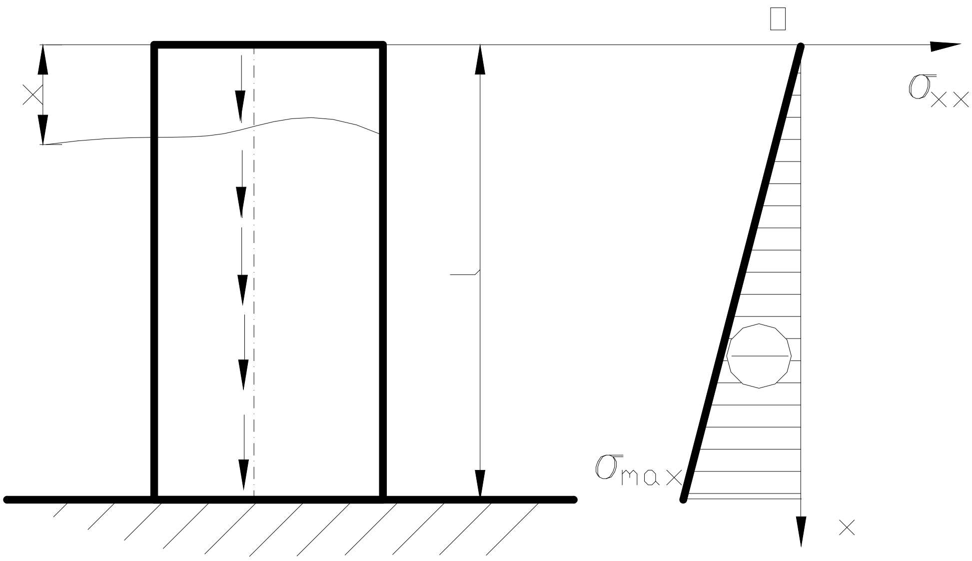


Figura 125

$$\sigma_{\max} = \sqrt{6 * 2{,}1 * 10^5 \frac{N}{mm^2} * 1450{,}4 * 10^{-6} \frac{N}{mm^3} * 4{,}261 * 10^3 mm}$$

$$\sigma_{\max} = 2790{,}51869 \frac{N}{mm^2}.$$

8.2. Solicitarea la încovoiere prin şoc

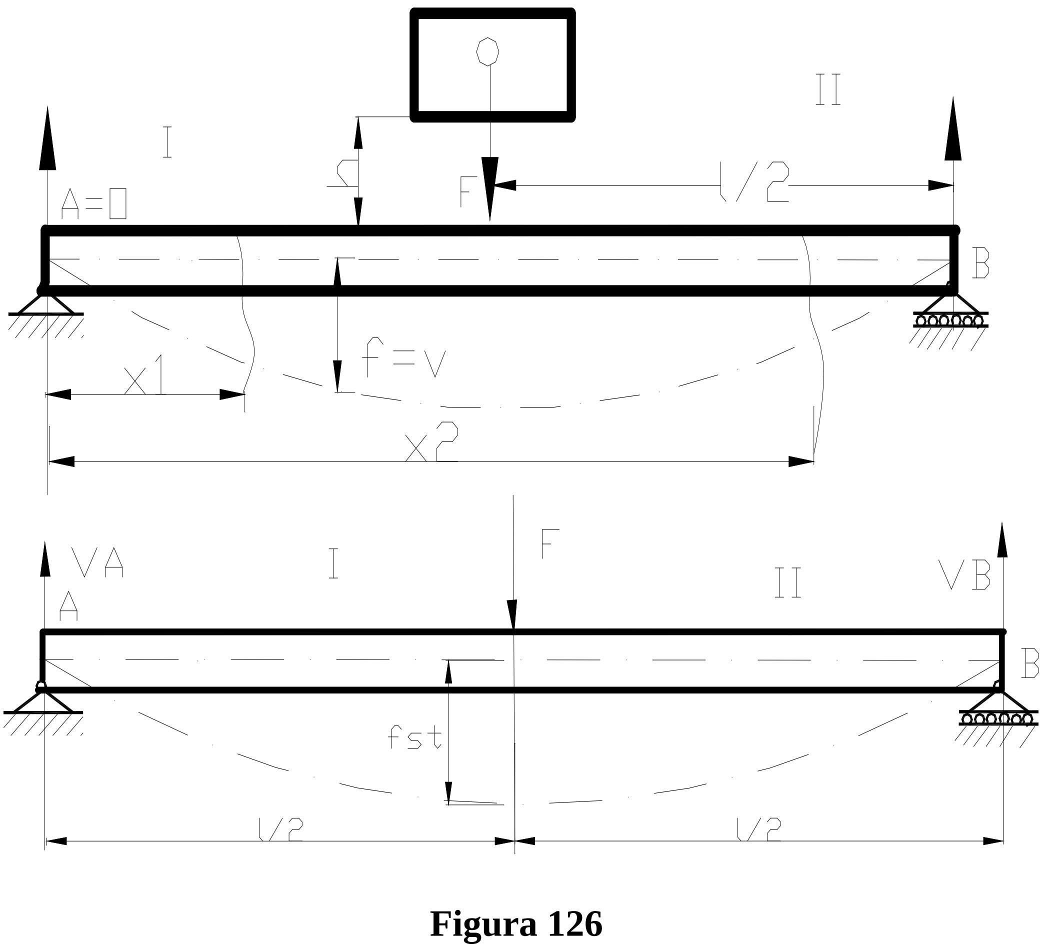


Figura 126

La fel energia cinetică a greutăţii F se egalează cu energia potenţială de deformaţie a barei. $Ec = L = F(h + f)$;

$$L = 24\frac{EI_z \cdot f^2}{l^3} \quad ; \quad L = \int_l \frac{M_{iz}^2}{2EI_z}dx \quad ; \quad M_{iz}(x) = \frac{F}{2}x \quad ;$$

$$L = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{F}{2}x\right)^2 * \frac{1}{2EI_z}dx = \frac{1}{EI_z}\frac{F^2}{4}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{l}{2}} \quad ; L = \frac{F^2 l^3}{96EI_z}$$

; Pentru calculul săgeţii f , aplicăm procedeul Clebsch, se ia ca origine A = 0.

$$M_{iz}(x_2) = \frac{F}{2}x - F\left(x - \frac{l}{2}\right) \quad ;$$

$$EI_z\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{F}{2}x + F\left(x - \frac{l}{2}\right) \quad ; \quad EI_z\frac{dv}{dx} = -\frac{F}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{F\left(x - \frac{l}{2}\right)^2}{2} + C$$

$$EI_z v(x) = -\frac{F}{4}\frac{x^3}{3} + \frac{F}{6}\left(x - \frac{l}{2}\right)^3 + Cx + D \quad ;$$

Aflăm pe C şi D din condiţiile de reazem (de sprijin) :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} v(x) = 0 = D \quad ; \quad D = 0 \quad ; \lim_{x \to 0}\frac{1}{EI_z}\left[-\frac{Fx^3}{12} + Cx + D\right] = 0 \quad ;$$

$$D = 0 \quad ; \quad \lim_{\substack{x \to l \\ x < l}} v(x) = 0 = \frac{1}{EI_z}\lim_{\substack{x \to l \\ x < l}}\left[-\frac{Fx^3}{12} + \frac{F}{6}\left(x - \frac{l}{2}\right)^3 + Cx\right] \quad ;$$

$$\frac{-Fl^3}{12} + \frac{F}{6}\left(l - \frac{l}{2}\right)^3 + Cl = 0 \quad ; \frac{-Fl^3}{12} + \frac{F}{6}\frac{l^3}{8} + Cl = 0$$

$$\frac{-Fl^2}{12} + \frac{Fl^2}{48} + C = 0;$$

$C = \frac{3Fl^2}{48}$; $v(x) = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{-Fx^3}{12} + \frac{F}{6}\left(x - \frac{l}{2}\right)^3 + \frac{3Fl^2}{48}x\right]$

$$f = \lim_{\substack{x \to \frac{l}{2} \\ x < \frac{l}{2}}} v(x) = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{-F}{12}\left(\frac{l}{2}\right)^3 + \frac{3Fl^2}{48}\frac{l}{2}\right]$$

$$f = \frac{Fl^3}{EI_z}\left[\frac{-1}{96} + \frac{3}{96}\right] = \frac{Fl^3}{48EI_z}; L = \frac{F^2l^3}{96EI_z} = F * \frac{Fl^3}{EI_z} * \frac{1}{96}$$

$$L = \frac{F}{96} * 48f = \frac{Ff}{2} \quad ; f^2 = \frac{F^2l^6}{48^2E^2I_z^2} \quad ; \quad \frac{F^2l^3}{EI_z} = \frac{f^2EI_z}{l^3}48^2 \quad ;$$

$$L = \frac{1}{96}f^2EI_z\frac{48^2}{l^3} = \frac{f^2EI_z48}{2*l^3} \quad ; \quad L = 24\frac{EI_zf^2}{l^3} \quad ; \quad Ec = L \quad ;$$

$$F(h + f) = \frac{24f^2EI_z}{l^3} \quad ; \quad Fl^3h + Fl^3f = 24f^2EI_z \quad ;$$

$$24f^2EI_z - Fl^3f - Fl^3h = 0 \quad ; \quad f_s = \frac{Fl^3}{48EI_z} \quad ;$$

$f_{1,2} = \frac{Fl^3 \pm \sqrt{F^2l^6 + 4*24EI_zFl^3h}}{2*24EI_z}$ se ia cu plus, pentru că săgeata dinamică este foarte mare .

$$f = \frac{Fl^3}{48EI} + \sqrt{\frac{F^2l^6}{(48EI_z)^2} + \frac{4*24EI_zFl^3h}{(48EI_z)^2}} = \frac{Fl^3}{EI_z} + \sqrt{\left(\frac{Fl^3}{48EI_z}\right)^2 + \frac{Fl^3*2h}{48EI_z}}$$

dar $\frac{Fl^3}{48EI_z} = f_s$ săgeata statică. $f = f_s + \sqrt{f_s^2 + 2hf_s}$;

$$f = f_s\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_s}}\right) \quad ;$$

$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_s}}$; $f =$ săgeta dinamică , $\psi =$ multiplicatorul de impact.

$$\begin{cases} f_d = \psi f_s = f \\ \sigma_d = \sigma = \sigma_s \psi = \frac{M_{izs}}{W_z}\psi \end{cases}$$

. Deci , cu cât f_s este mai mică , cu atît ψ este mai mare şi în mod indirect f săgeata dinamică. Atunci când $f_s \to 0$ atunci $f_d \to \infty$.

Problema nr.4

O greutate F = 130 kN cade de la înălţimea h = 2,13m pe o grindă AB de modul de elasticitate , $E = 2{,}1 * 10^5 \frac{N}{mm^2}$ şi lungime $l = 0{,}84m$; $\begin{cases} l_1 = 0{,}3m \\ l_2 = 0{,}54m \end{cases}$, aşezată pe două reazeme , având secţiunea transversală circulară cu d = 20 mm.

Să se calculeze tensiunea maximă din bară .

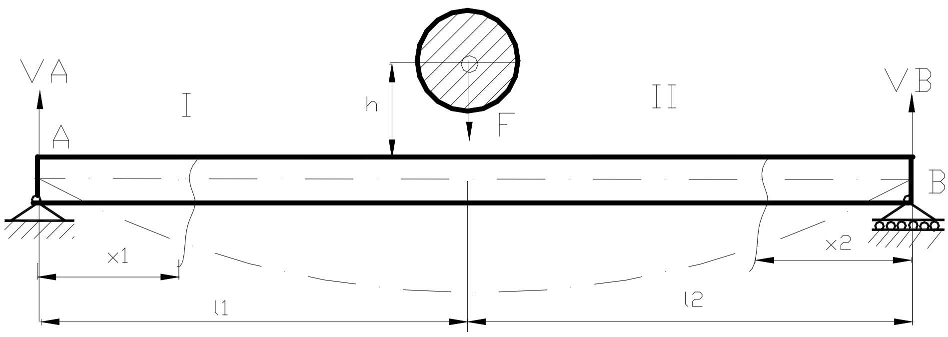


Figura 127

$Ec = L = Fh$; L = energia de deformaţie a grinzii ;

$L=\int_{l_1}\frac{M_{iz}^2(x_1)}{2EI_z}dx_1+\int_{l_2}\frac{M_{iz}^2(x_2)}{2EI_z}dx_2$ din figura 128 ; $V_A^0+V_B^0=F$;

$\sum F_y=0$; $\sum M_{iz}A=0$; $V_B^0=\frac{Fl_1}{l}$; $F*l_1-V_B^0*l=0$;

$\sum M_{iz}B=0$;

$$V_A^0 l-Fl_2=0 \quad ; \quad V_A^0=\frac{F*l_2}{l} \quad ;$$

$V_A^0+V_B^0=\frac{Fl_1}{l}+\frac{Fl_2}{l}=\frac{F(l_1+l_2)}{l}=F$ este îndeplinită ecuaţia de verificare, deci s-au calculat corect forţele de reacţiune V_A^0 şi V_B^0 ;

$$V_A^0=\frac{Fl_2}{l} \quad ; \quad V_B^0=\frac{Fl_1}{l}$$

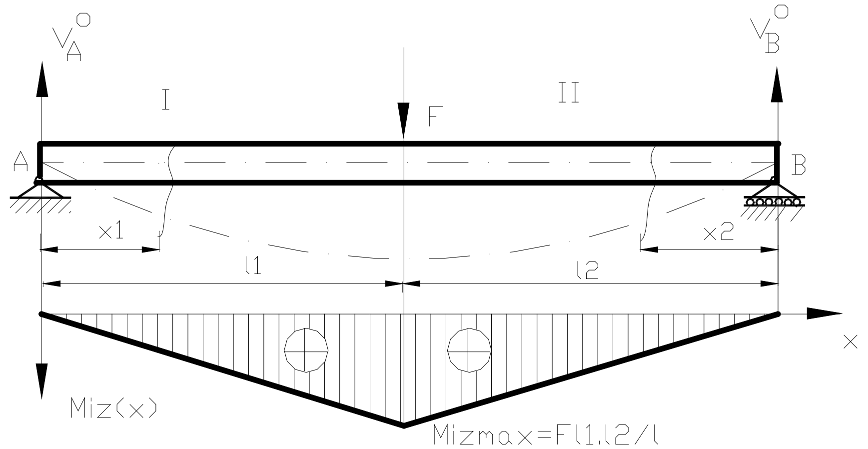


Figura 128

<u>Regiunea întâi</u> $x_1\in[0,l_1]$; $M_{iz}(x_1)=\frac{Fl_2}{l}x_1$;

$$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_1>0}} M_{iz}(x_1)=0 \quad ; \quad \lim_{\substack{x_1\to l_1\\ x_1<l_1}} M_{iz}(x_1)=\frac{Fl_2 l_1}{l}.$$

Reg. II. $x_2 \in [0, l_2)$; $M_{iz}(x_2) = \frac{Fl_1}{l} x_2$; $\lim_{\substack{x_2 \to 0 \\ x_2 < 0}} M_{iz}(x_2) = 0$;

$\lim_{\substack{x_2 \to l_2 \\ x_2 < l_2}} M_{iz}(x_2) = \frac{Fl_1 l_2}{l}$;

$$L = \int_0^{l_1} \left(\frac{Fl_2}{l} x_1 \right)^2 \frac{dx}{2EI_z} + \int_0^{l_2} \left(\frac{Fl_1}{l} x_2 \right)^2 \frac{dx}{2EI_z} = \left(\frac{Fl_2}{l} \right)^2 \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^{l_1} * \frac{1}{2EI_z} +$$

$$+ \left(\frac{Fl_1}{l} \right)^2 \frac{1}{2EI_z} \frac{x_2^3}{3} \Big|_0^{l_2} =$$

$$= \left(\frac{Fl_2}{l} \right)^2 \frac{l_1^3}{3} \frac{1}{2EI_z} + \left(\frac{Fl_1}{l} \right)^2 * \frac{1}{2EI_z} \frac{l_2^3}{3} = \frac{1}{6EI_z} \left[\left(\frac{Fl_1 l_2}{l} \right)^2 * l_1 + \left(\frac{Fl_1 l_2}{l} \right)^2 l_2 \right]$$

; dar $M_{iz\max} = \frac{Fl_1 l_2}{l}$; $l_1 + l_2 = l$;

$L = \frac{1}{6EI_z} \left(\frac{Fl_1 l_2}{l} \right)^2 [l_1 + l_2]$; $L = \frac{M_{iz\max}^2 l}{6EI_z}$;

$L = Ec$; $Fh = \frac{M_{iz\max}^2 l}{6EI_z}$; $M_{iz\max} = \frac{Fl_1 l_2}{l}$; $M_{iz\max} = \sqrt{\frac{6EI_z Fh}{l}}$

rezultă momentul încovoietor maxim.

$M_{iz\max} = \sqrt{\frac{6EI_z Fh}{l}}$; $I_z = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi 20^4}{64} = 7850 mm^4$;

$$M_{iz\max} = \sqrt{\frac{6 * 2{,}1 * 10^5 \frac{N}{mm^2} * 7850 mm^4 * 130 * 10^3 N * 2{,}13 m}{0{,}84 m}} \quad ;$$

$M_{iz\max} = 5710{,}076619 * 10^4 \; N * mm$;

Tensiunea maximă se determină cu relaţia lui Navier :

$$\sigma_{max} = \frac{M_{iz\,max}}{W_z} = \sqrt{\frac{6EI_zFh}{lW_z^2}} \quad ; \frac{I_z}{y_{max}} = W_{z\,min} \quad ; \quad I_z = W_z y_{max} \quad ;$$

$$\sigma_{max} = \frac{5710{,}076 * 619 * 10^4\ Nmm}{785 mm^3} = 7{,}273983 * 10^4\ \frac{N}{mm^2} \quad ;$$

$$W_z = \frac{\pi . d^3}{32} = \frac{\pi}{32} * 20^3 mm^3 = 785 mm^3$$

Problema nr.5

O greutate F = 0,45 KN , cade de la o înălţime h = 2,17 m , pe capătul unei grinzi încastrate de metal $\left(E = 2{,}1 * 10^5\ \frac{N}{mm^2} \right)$, de lungime $l = 1{,}819 m$ şi de secţiune circulară inelară cu: d = 20 mm şi D = 60 mm .

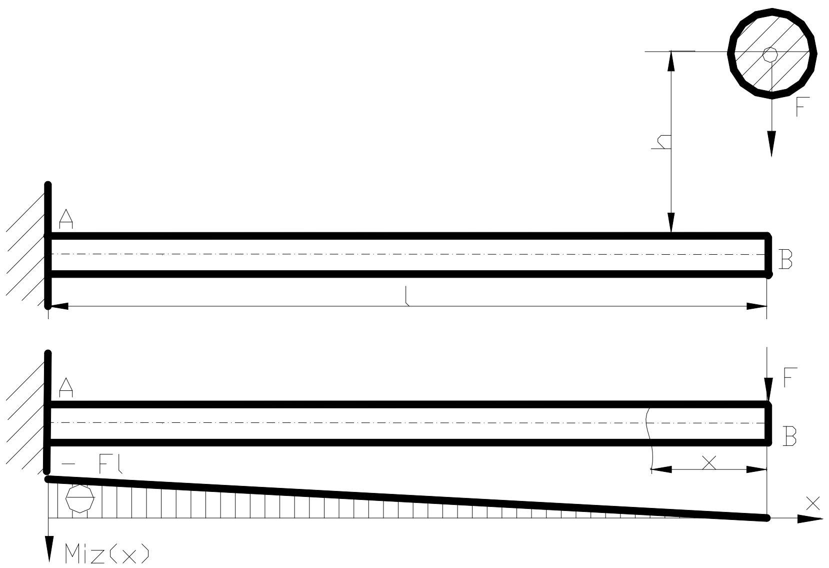


Figura 129

Se cere să se determine tensiunea normală maximă şi săgeata din dreptul forţei dinamice în momentul lovirii.

Ecuaţia fibrei medii deformate fiind : $EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = Fx$. Aflăm pe C şi D din condiţiile de reazem.

$$\begin{cases} EI_z \frac{dv}{dx} = \frac{Fx^2}{2} + C \\ \hline EI_z v(x) = \frac{Fx^3}{6} + Cx + D \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to l \\ x < l}} \frac{dv}{dx} = 0 = \varphi_A = \frac{1}{EI_z} \lim_{\substack{x \to l \\ x < l}} \left(\frac{Fx^2}{2} + C \right) = 0 \quad ; \quad \frac{Fl^2}{2} + C = 0$$

$$;C = -\frac{Fl^2}{2} \qquad \lim_{\substack{x \to l \\ x < l}} v(x) = 0 = v_A = \frac{1}{EI_z} \lim_{\substack{x \to l \\ x < l}} \left(\frac{Fx^3}{6} + Cx + D \right) = 0$$

$$\frac{Fl^3}{6} - \frac{Fl^2}{2} l + D = 0 \quad ;$$

$$D = \frac{Fl^3}{2} - \frac{Fl^3}{6} = \frac{Fl^3}{3} \quad ; \quad \text{deci} \quad v(x) = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{Fx^3}{6} - \frac{Fl^2}{2} x + \frac{Fl^3}{3} \right]$$

;Săgeata statică în B :

$$f_{st} = v_{st} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} v(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{EI_z} \left[\frac{Fx^3}{6} - \frac{Fl^2}{2} x + \frac{Fl^3}{3} \right] = \frac{Fl^3}{3EI_z}$$

$$f_{st} = \frac{Fl^3}{3EI_z} = f_B = \frac{0{,}45kN.(1{,}819m)^3}{3 * 2{,}1 * 10^5 \frac{N}{mm^2} \frac{\pi}{64} \left(60^4 - 20^4\right) mm^4} =$$

$$= \frac{0{,}45 * 10^3 N * (1{,}819)^3 * 10^9 mm^3}{3 * 2{,}1 * 10^5 \frac{N}{mm^2} \frac{\pi}{64} \left(60^4 - 20^4\right) mm^4}$$

$f_B = f_{st} = 6{,}8456$ mm ; $I_z = \frac{\pi}{64}\left(60^4 - 20^4\right)mm^4 = 62{,}8 * 10^4 mm^4$;

$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 * 2{,}17.10^3 mm}{6{,}8456mm}} = 26{,}198886$; săgeata în momentul şocului va avea valoarea :

$$f_d = f = \psi . f_{st} = 26{,}198886 * 6{,}8456mm = 179{,}34mm$$

$$\sigma_{st\max} = \frac{M_{iz\max}}{W_{z\min}} = \frac{Fl}{W_{z\min}} \quad ; \quad M_{iz\max} = Fl \quad ;$$

$$W_z = \frac{I_z}{\frac{D}{2}} = \frac{62{,}8 * 10^4 mm^4}{30mm} = 2{,}093333mm^3 * 10^4$$

$$W_z = \frac{\pi}{32D}\left(D^4 - d^4\right) = \frac{\pi}{32 * 60}\left(60^4 - 20^4\right) = 2{,}093333mm^3 * 10^4 \quad ;$$

$$\sigma_{st\max} = \frac{0{,}45 * 10^3 N * 1{,}819 * 10^3 mm}{2{,}093333mm^3 * 10^4} = \frac{0{,}391027}{10^4} * 10^6 \frac{N}{mm^2} = 39{,}1027 \frac{N}{mm^2} \quad ;$$

$$\sigma_{d\max} = \psi . \sigma_{st} = 39{,}1027 \frac{N}{mm^2} * 26{,}198886 = 1024{,}447180 \frac{N}{mm^2}$$

fiind destul de mare, bara se rupe.

Problema nr.6

O grindă articulată, de greutate P = 0,98 kN , având secţiunea transversală pătrat cu a = 20 mm şi lungimea l = 4,3m , cade din poziţia verticală asupra unui reazem rigid , ca în figura 130 . Se cere să se afle expresia tensiunii maxime .

$I_z = \frac{a^4}{12} = \frac{20^4}{12} = 13333{,}33mm^4$; Expresia multiplicatorului de impact este: $\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{L_{ext}}{L_{int}}}$; $L_{ext} = \frac{Pl}{2}$; $L_{int} = \int_{(l)} \frac{M_{iz}^2(x)}{2EI_z} dx$

$F(h+f)=\iiint_V \frac{\sigma^2}{2E}dV$ sau $f=f_d=\psi.f_{st}$; $\sigma_d=\psi.\sigma_{st}=\sigma$;

$F(h+\psi.f_s)=\iiint_V \psi^2\frac{\sigma_{st}^2}{2E}dV$; $L_0=F.h$ lucrul mecanic produs de

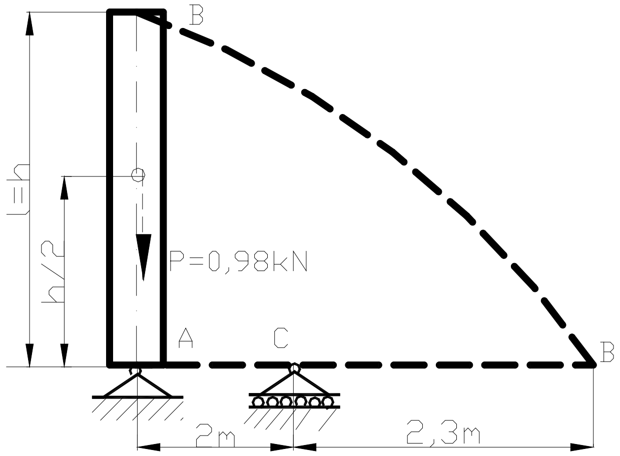


Figura 130

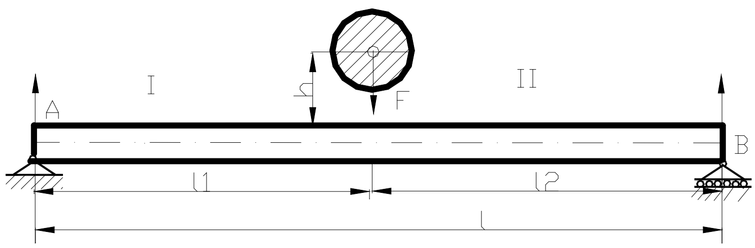


Figura 131

sarcina F = P până în momentul impactului. $L_s=\frac{F.f_s}{2}$ şi

$L_s=\iiint_V \frac{\sigma_s^2}{2E}dV$; $F.h+\psi.f_s.F=\psi^2.L_s$;

$F.f_s=2L_s$; $L_0+2L_s.\psi=\psi^2.L_s$; $\psi^2.L_s-2L_s.\psi-L_0=0$;

$\psi^2-2\psi-\frac{L_0}{L_s}=0$; $\psi_{1,2}=1\pm\sqrt{1+\frac{L_0}{L_s}}$; $\psi=1+\sqrt{1+\frac{L_0}{L_s}}$;

L_0 = lucrul mecanic al forţelor exterioare ; L_s = lucrul mecanic de deformaţie înmagazinat în bară.

Pentru calculul lucrului mecanic interior de deformaţie înmagazinat în bară , ne folosim de faptul că q=P/l este aplicată în mod static din figura 132.

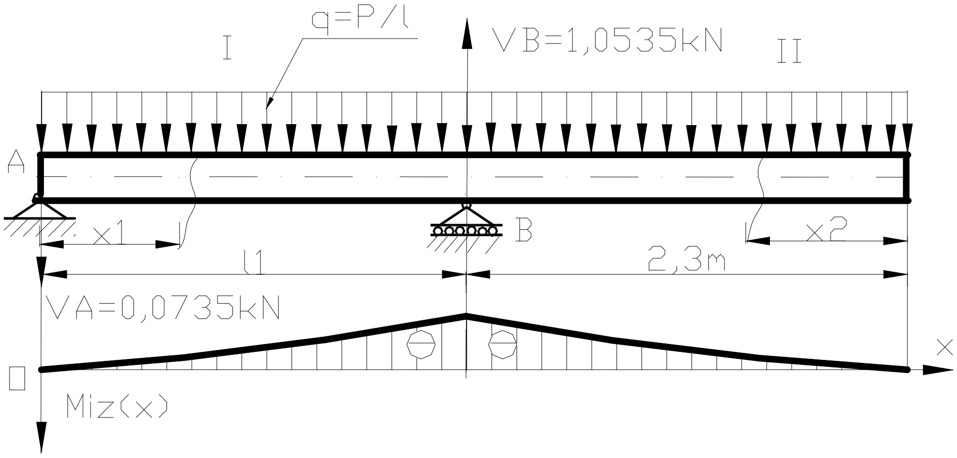


Figura 132

$V_A + V_B = P$; $\sum M_{iz}(A) = 0$; $P.\frac{l}{2} - V_B.2m = 0$; $V_B = \frac{Pl}{4}$;

$\sum M_{iz}(B) = 0$; $V_A.2m + P\left(\frac{l}{2} - 2m\right) = 0$; $V_A = -\frac{Pl}{4} + P;$

$q = \frac{0{,}98.kN}{4{,}3m} = 0{,}227907\frac{kN}{m}; P = 0{,}98kN; V_A + V_B = 0{,}98kN$; este îndeplinită ecuaţia de verificare, s-au calculat corect forţele de reacţiune : V_A şi V_B .

$$V_A = -\frac{0{,}98kN * 4{,}3}{4} + 0{,}98kN = -\frac{0{,}98kN * 0{,}15}{2} = -0{,}0735kN$$

$$V_B = \frac{0{,}98kN * 4{,}3}{4} = 1{,}0535kN;$$

Regiunea întâi:

$x_1 \in (0;2m); M_{iz}(x_1) = -0{,}0735kN * x_1 - \frac{qx_1^2}{2};$

$M'_{iz}(x_1) = -0{,}0735kN - qx_1;\ M''_{iz}(x_1) = -q;$ concavă ;

$$\lim_{x_1 \downarrow 0} M_{iz}(x_1) = \lim_{x_1 \uparrow 0}\left[\ -0{,}0735kN * x_1 - \frac{qx_1^2}{2}\ \right] = 0;$$

$$\lim_{x_1 \uparrow 2m} M_{iz}(x_1) = \lim_{x_1 \uparrow 2m}\left[\ -0{,}0735kN * x_1 - \frac{qx_1^2}{2}\ \right] = -0{,}0735kN * 2m -$$

$$-\frac{0{,}227907\frac{kN}{m}(2m)^2}{2} = -602814Nmm;$$

Regiunea a II-a

$x_2 \in (0;2{,}3m); M_{iz}(x_2) = -\frac{qx_2^2}{2};\ M'_{iz}(x_2) = -qx_2;\ M''_{iz}(x_2) = -q;$

concavă ; $\lim_{x_2 \downarrow 0} M_{iz}(x_2) = \lim_{x_2 \uparrow 0}\left[-\frac{qx_2^2}{2}\ \right] = 0;$

$$\lim_{x_2 \uparrow 2{,}3m} M_{iz}(x_2) = \lim_{x_2 \uparrow 2{,}3m}\left[-\frac{qx_2^2}{2}\right] = -\frac{0{,}227907\frac{kN}{m}(2{,}3m)^2}{2} =$$

$= -602814Nmm;$

$$L_{\text{int}} = \int_0^{2m}\left(-0{,}0735kN.x_1 - \frac{qx_1^2}{2}\right)^2 \frac{dx_1}{2EI_z} + \int_0^{2{,}3m} \frac{\left(-\frac{qx_1^2}{2}\right)^2}{2EI_z} dx_2 =$$

$$\frac{0{,}331675kNm^3}{2EI_z};$$

$$L_{\text{int}} = \frac{0{,}331675.10^{12}\, N.mm^3}{2 * 2{,}1.10^5 \dfrac{N}{mm^2} 13333{,}33 mm^4} = 59{,}227693 N.mm;$$ $L_{int} = L_s$;

$L_0 = L_{ext}$;

$$L_0 = L_{ext} = \frac{Pl}{2} = \frac{0{,}98kN * 4{,}3m}{2} = 2{,}107 * 10^6\, N.mm;$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{L_0}{L_s}};\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2{,}107.10^6\, N.mm}{59{,}227693 N.mm}} = 189{,}6148885;$$

multiplicatorul de impact .

$$M_{iz\max} = \left| -602814 N.mm \right| = 602814 N.mm;$$

$$\sigma_{st,\max} = \frac{M_{iz\max}}{W_{z\min}} = \frac{602814 N}{1333{,}33 mm^3};$$

$$\sigma_{st\max} = 452{,}111630 \frac{N}{mm^2};$$

$$\sigma_{d,\max} = \psi * \sigma_{st,\max} = 189{,}6148885 * 452{,}11 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{d,\max} = 85727{,}09631 \frac{N}{mm^2} > \sigma_a$$, bara se va rupe , nu rezistă .

8.3. Solicitarea la răsucire prin şoc

Dacă avem un arbore de diametru d , pe care este montat un volant cu momentul de inerţie masic (J), fiind în mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară (ω), apoi se produce o oprire bruscă a arborelui într-o secţiune oarecare (M) , aflată la distanţa (l) de volant . Oprirea bruscă se face într-un timp foarte scurt, ceea ce duce la împiedicarea producerii căldurii prin frecare , astfel întreaga energie cinetică a volantului se transformă în energie potenţială de deformaţie a arborelui . Apoi se determină efortul unitar de răsucire produs de către şoc în

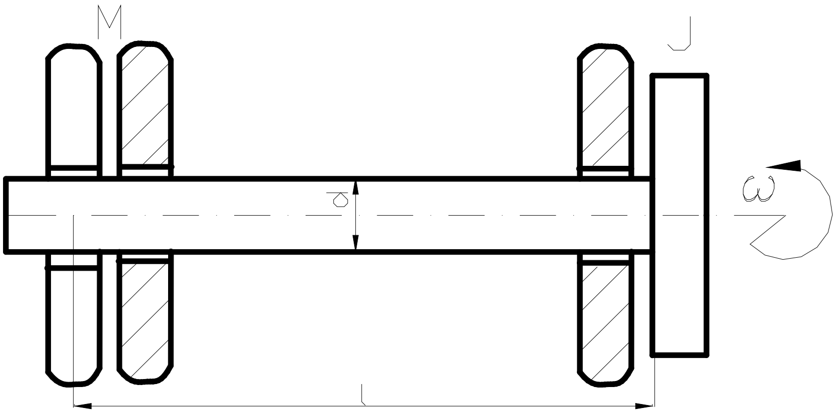


Figura 133

arbore, energia cinetică a volantului va fi : $E_c = \frac{1}{2}J\omega^2$. Iar lucrul mecanic de deformaţie al arborelui este, $L = \int_l \frac{M_t^2(x)}{2GI_p}dx$; dar

$$\tau_{max} = \frac{M_{t,max}}{W_{p,min}} = \frac{M_t * d}{2I_p}; M_t = \frac{2\tau_{max} * I_p}{d} .$$

L =

$$\int_l \frac{1}{GI_p}\left(\frac{2\tau_{max} * I_p}{d}\right)^2 dx = \int_l \frac{1}{2GI_p}\frac{4\tau_{max}^2 * I_p^2}{d^2}dx = \frac{2\tau_{max}^2 * I_p}{Gd^2} * x\Big|_0^l ;$$

$$L = \frac{2\tau_{max}^2 * I_p * l}{Gd^2}; \quad I_p = \frac{\pi.d^4}{32}; volumul = V = \frac{\pi.d^2}{4}.l$$; fiind volumul arborelui,

$$L = \frac{2\tau_{max}^2 * \frac{\pi.d^4}{32} * l}{Gd^2} = \frac{\tau_{max}^2}{16G}\left(\pi.d^2.l\right) = \frac{\tau_{max}^2}{4G}\frac{\pi.d^2}{4}.l = \frac{\tau_{max}^2}{4G}.V =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\tau_{max}^2}{2G}V$$

$A = \frac{\pi . d^2}{4}$; aria secţiunii transversale. Dar $E_c =$ L , de unde implică : $\frac{1}{2} J . \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{\tau_{max}^2}{2G} . V$; de undfe rezultă că , $\tau_{max} = \sqrt{\frac{2GJ\omega^2}{V}}$;

$J = \frac{PD^2}{8g}$ pentru un volant de greutate (P) , având forma unui disc plin de diametru (D) . În cazul când volantul are forma unei coroane circulare subţiri , de diametru mediu (D) , $J = \frac{PD^2}{4g}$; pentru a fi un calcul şi mai precis trebuie ca (J) să includă şi momentul de inerţie masic al arborelui.

Problema nr.1

Un arbore de transmisie , de diametru d = 4,5 cm şi de lungime l = 7,912 m are la un capăt o roată de dimetru D = 45 cm şi greutate P = 18 daN , arborele se roteşte cu n = 165 rot/min şi la un moment dat arborele se frânează brusc .

Să se calculeze efortul unitar la răsucire care se produce în arbore , în două cazuri:

a) ţinând seama de masa arborelui ,
b) neglijând masa arborelui.

Rezolvare:

Se dau : $\gamma = 7{,}85 \frac{Kgf}{dm^3} ; G = 0{,}81.10^5 \frac{N}{mm^2}$.

$E_c =$ L , $\frac{1}{2}(J + J_1).\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{\tau_{max}^2}{2G} . V$; unde (J) fiind momentul de inerţie masic al arborelui de greutate (Q) , iar (J_1) momentul de inerţie masic al roţii de greutate (P) ,

$$V=\frac{\pi.d^2}{4}.l=\frac{\pi.(4{,}5cm)^2}{4}(7{,}912m)=\frac{\pi.(45mm)^2}{4}(7{,}912*10^3mm)=$$

$$=12577{,}113*10^3mm^3; Q=V.\gamma=12577{,}113*10^3mm^3*7{,}85\frac{Kgf}{dm^3};$$ unde

$$1Kgf=9{,}8N$$

$(1dm)^3 = (100mm)^3 = 10^6\ mm^3$; $g = 9{,}8\ m/s^2 = 9{,}8*10^3\ mm/s^2$;

$$Q=12577{,}113*10^3mm^3*7{,}85*9{,}8\frac{N}{10^6mm^3}=967{,}5573031N;$$

$$J=\frac{Q.d^2}{8g}=\frac{967{,}5573031N.(45mm)^2}{8*9{,}8*10^3\frac{mm}{s^2}}=24{,}991117\ N.mm.s^2;$$

$$J_1=\frac{P.D^2}{8g}=\frac{18*10N.(450mm)^2}{8*9{,}8*10^3\frac{mm}{s^2}}=464{,}923469N.mm.s^2;$$ $J + J_1 =$

$489{,}914586\ N.mm.s^2$; $\omega=\frac{2\pi.n}{60}=\frac{2.\pi.165}{60}\frac{rot}{\min}=17{,}27\frac{rad}{s}$; $E_c = L$;

$$\frac{1}{2}\frac{\tau_{\max}^2}{2G}.V=\frac{1}{2}(\omega)^2[J+J_1];\quad \tau_{\max}=\sqrt{\frac{2G(J+J_1)\omega^2}{V}};$$

$$\tau_{\max}=\sqrt{\frac{2*0.81*10^5\frac{N}{mm^2}\left(17{,}27\frac{rad}{s}\right)^2*489{,}914586N.mm.s^2}{12577{,}113*10^3mm^3}}=43{,}382\frac{N}{mm^2}$$

Cazul b)

Atunci când nu se ţine seama de masa arborelui , implică (J = 0) , atunci avem:

$$\tau_{\max}=\sqrt{\frac{2G.J_1\omega^2}{V}};$$

$$\tau_{\max}=\sqrt{\frac{2*0.81*10^5\frac{N}{mm^2}\left(17{,}27\frac{rad}{s}\right)^2*464{,}923469N.mm.s^2}{12577{,}113*10^3mm^3}}==42{,}262\frac{N}{mm^2}.$$

Capitolul IX

Echilibrul sistemelor plane alcătuite din bare rigide legate între ele prin articulaţii.
Grinzi cu zăbrele

9.1. Definiţii

Echilibrul sistemelor plane de bare articulate între ele , care formează o structură geometric invariabilă , se numeşte obişnuit grindă cu zăbrele, acest sistem de corpuri pot fi alcătuite într-0 mare diversitate de forme geometrice. Barele care alcătuiesc sistemul pot fi legate între ele astfel ca să se obţină un ansamblu rigid, capabil să suporte forţe, grinzile cu zăbrele au o largă întrebuinţare , anume: ca elemente de rezistenţă la acoperirea unor hale industriale de dimensiuni mari, la poduri de şosea şi cale ferată , la macarale, la stâlpi electrici pentru reţea de înaltă tensiune. Barele se prind între ele cu ajutorul unor plăcuţe denumite gusee, barele se prind de gusee cu ajutorul niturilor sau sudurilor, grinzile cu zăbrele sunt plane sau spaţiale.

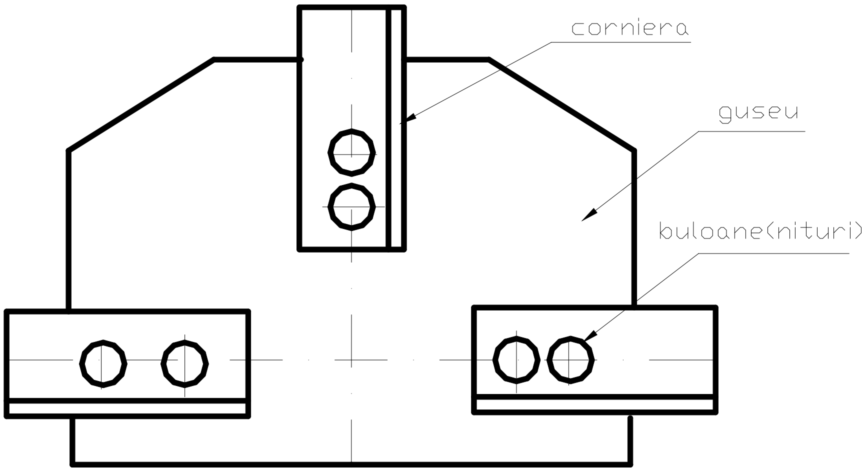


Figura 134

Calculul grinzilor spaţiale este mai complicat , de aceea se impune reducerea acestora la grinzi plane, barele care formează conturul grinzii poartă denumirea de tălpi, partea de deasupra reazemelor se

numeşte talpa superioară (S) , iar partea de dedesubtul reazemelor se numeşte talpa inferioară (I) . Barele ce leagă tălpile şi le menţin la distanţă fixă se numesc zăbrele , zăbrelele montate cu o înclinare

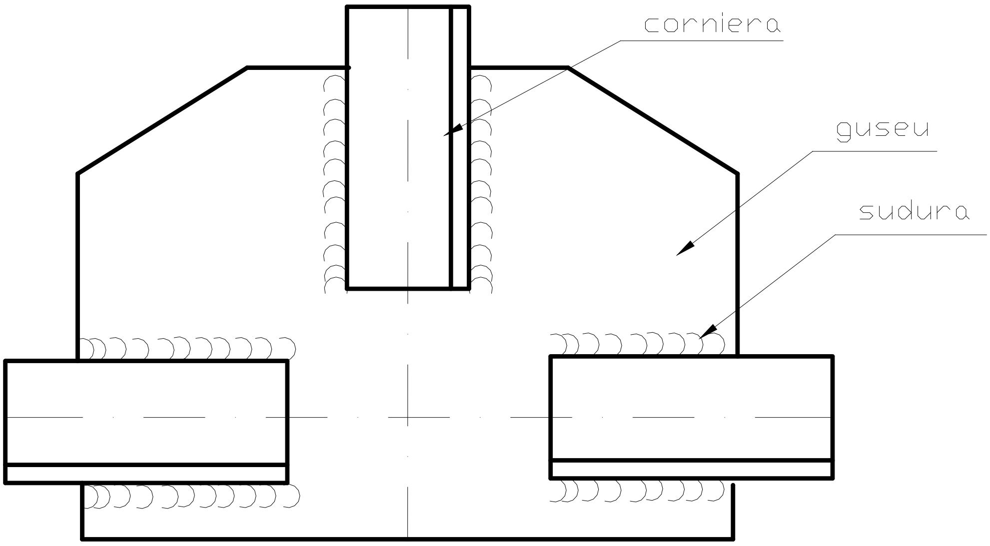


Figura 135

oarecare se numesc diagonale (D) , iar cele ce au o direcţie verticală poartă denumirea de montanţi (M) .

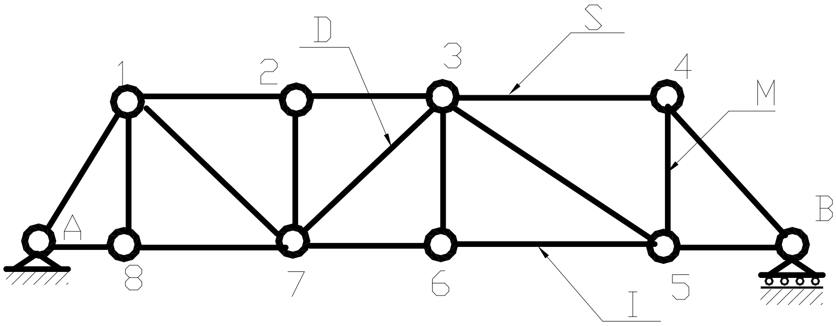


Figura 136

Ţinând seama de forma conturului , grinzile cu zăbrele se împart în :
a) grinzi cu tălpi paralele (fig: 136)
b) grinzi cu tălpi curbe (fig: 137)

Îmbinând mai multe feluri de contururi şi tălpi se pot obţine o serie mai mare de grinzi cu zăbrele , în practică de îmbină utilul cu esteticul . Grinzile cu zăbrele au câştigat teren foarte mare în ultimul timp în construcţia de macarale , la construcţie de poduri etc.

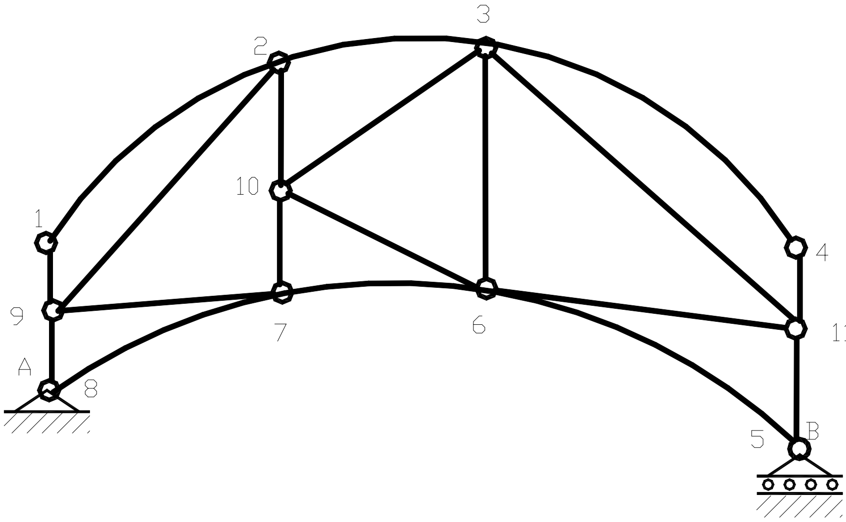


Figura 137

c) grinzi cu tălpi poligonale

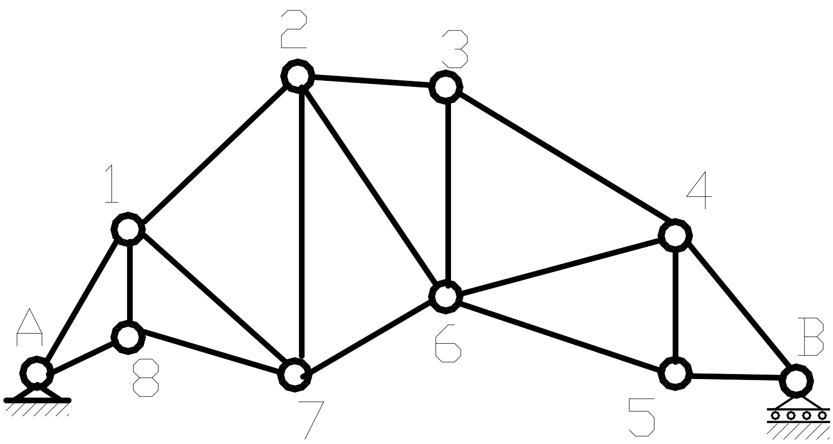


Figura 138

d)grinzi dreptunghiulare când au montanţi şi diagonale (fig:139)

e) grinzi triunghiulare când au numai diagonale
f) grinzi cu diagonale în (K) .
În cazul grinzilor cu zăbrele , solicitarea de bază a barelor o constituie solicitarea la tracţiune sau la compresiune.

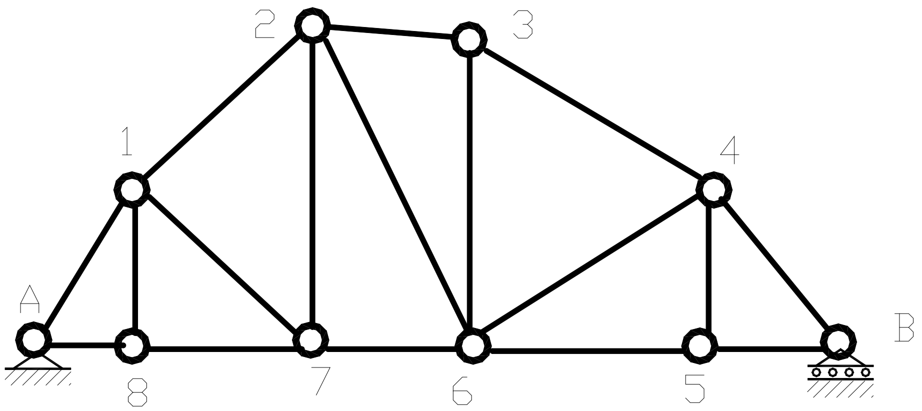


Figura 139

9.1.1. Calculul grinzilor cu zăbrele

În ipoteza simplificatoare a articulaţiilor perfecte între barele rigide ale unei grinzi cu zăbrele este necesar ca poziţia unui nod în raport cu celelalte să fie invariabilă şi în acelaşi timp grinda cu zăbrele trebuie fixată în planul său , prin legarea cu mediul exterior. Deasemeni în calculul grinzilor cu zăbrele vom admite că :

a) sistemele sunt plane
b) nodurile sunt articulaţii perfecte
c) forţele exterioare (sarcinile) sunt conţinute în planul grinzii şi sunt transmise sistemului numai prin noduri.
d) greutatea proprie a barelor este neglijabilă în raport cu mărimea sarcinilor aplicate.

Construcţia cea mai simplă geometric invariabilă , formată din bare articulate, este triunghiul care are trei noduri şi trei bare un al patrulea nod se poate fixa de două noduri prin două bare articulate şi operaţia se poate continua pentru oricâte noduri. . Pentru a calcula eforturile din zăbrele utilizăm metoda secţiunilor , în această metodă se află inclusă metoda izolării nodurilor (care poate fi analitică sau grafică) .

Existând o grindă cu zăbrele în plan cu (n) noduri , se pot scrie numai (2n) ecuaţii de proiecţii de forţe pe două direcţii normale între ele , deoarece direcţiile eforturilor din zăbrele se intersectează în nod şi în acest caz , ecuaţia de momente este dependentă de primele două. Grinda având un număr de (b) bare , deci trebuie să determinăm (b) eforturi necunoscute, apoi grinda cu zăbrele se reazemă pe un reazem simplu şi unul articulat, rezultă că noi avem de determinat încă trei necunoscute. Deci numărul de necunoscute pentru o grindă fiind (b+3) şi avem următoarele cazuri:

a) $2n > b+3$ grinda suferă o modificare a formei iniţiale , adică este un mecanism , acest aspect nu îl studiază rezistenţa materialelor.

b) $2n < b+3$ grina fiind static nedeterminată , pentru acest lucru se numeşte grindă cu zăbrele cu bare suplimentare.

c) $2n = b + 3$ grinda este static determinată .

Există sisteme care îndeplinesc condiţia $2n = b+3$, dar sunt mecanisme , îşi modifică forma iniţială , pentru ca patrulaterul [3-4-5-6] să nu îşi modifice forma sa iniţială trebuie ca diagonala [2-6] sau [3-5] să fie mutate între nodurile [4-6].

Pentru a putea calcula eforturile din barele unei grinzi cu zăbrele static determinată , trebuie ca pe lângă condiţia $2n = b +3$, să satisfacă şi condiţia de nemodificare a formei .

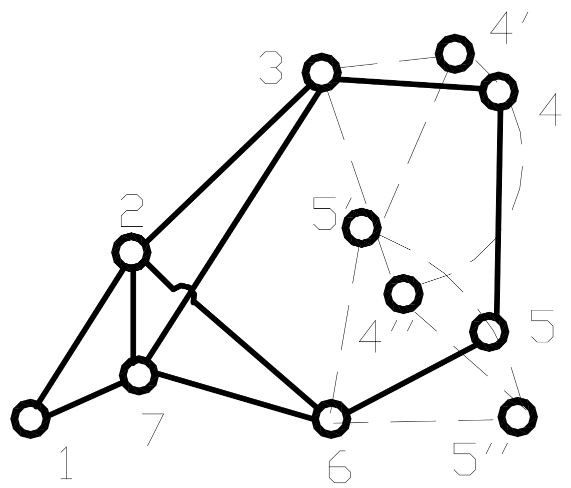


Figura 140

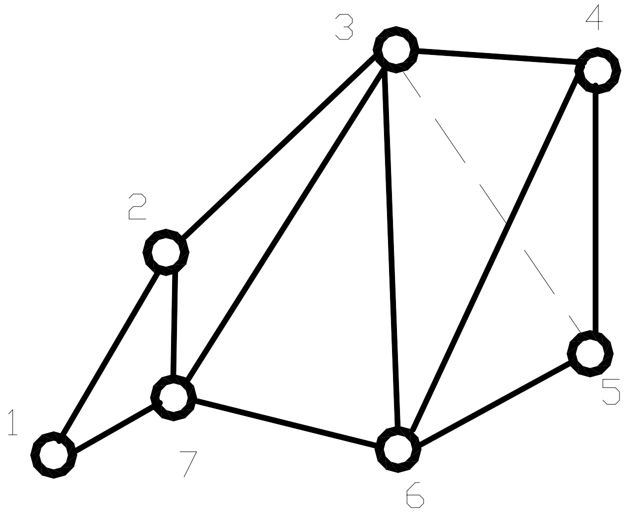


Figura 141

9.2. Calculul eforturilor

<u>9.2.1. Metoda izolării nodurilor – metoda analitică</u>

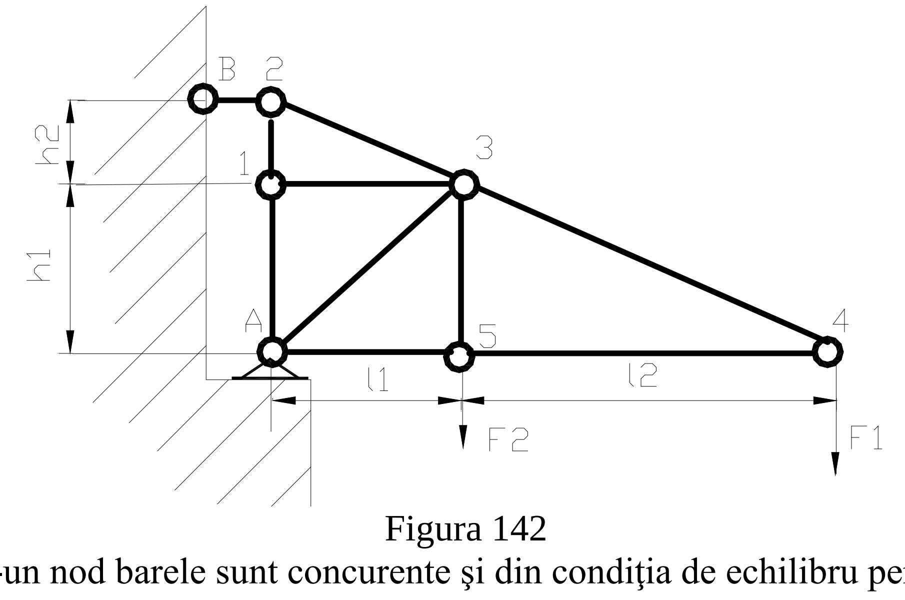


Figura 142

Într-un nod barele sunt concurente şi din condiţia de echilibru pentru bare vom obţine:

$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$; **Notă:** Ecuaţia de momente $\sum M_{iz} = 0$; este o combinaţie liniară de

$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$, nu este o ecuatie liniară independentă .

Având două ecuaţii trebuie să pornim dintr-un nod ce are cel mult două necunoscute.

Problema nr.1

Să se calculeze eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figură şi să se dimensioneze ştiind că sunt de secţiune circulară , se dau :

$\sigma_a = 104 \frac{N}{mm^2}; l = 0,28m; F = 2kN.$

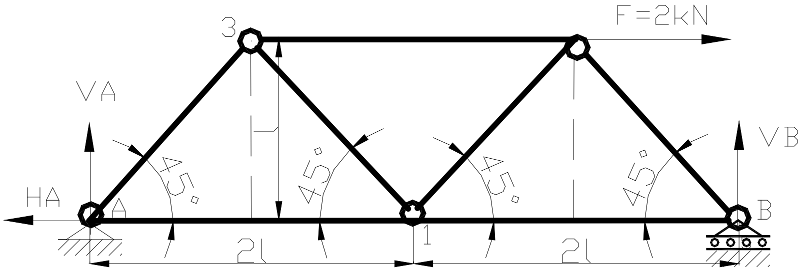


Figura 143

Se calculează forţele de reacţiune V_A , H_A şi V_B din condiţiile de echilibru :

$\sum F_x = 0; H_A - F = 0; H_A = F$; $\sum F_y = 0; V_A + V_B = 0$, fiind ecuaţia de verificare , se află forţele de reacţiune V_A , şi V_B din condiţia de echilibru $\sum M_{iz} = 0$.

$\sum M_{iz}(A) = 0; F.l - V_B.4l = 0; V_B = \frac{F}{4};$

$\sum M_{iz}(B) = 0; F.l + V_A.4l = 0; V_A = -\frac{F}{4};$

$\sum F_y = 0; V_A + V_B = 0$;   -F/4 + F/4 = 0 ecuatia de verificare este îndeplinită implică calculul corect al forţelor de reacţiune.
Deoarece V_A a dat cu semnul minus , îi schimbăm sensul.

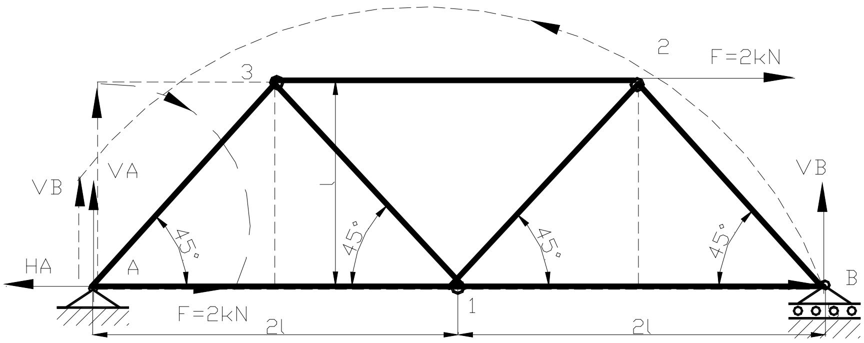


Figura 144

Nu trebuie pornit de la nodurile (3, 2 , 1) pentru că avem mai multe necunoscute de determinat (mai multe decât două) şi nu le putem determina , se începe din nodurile (A) sau (B) unde există numai două necunoscute şi se pot calcula .

Se porneşte din nodul (A) :

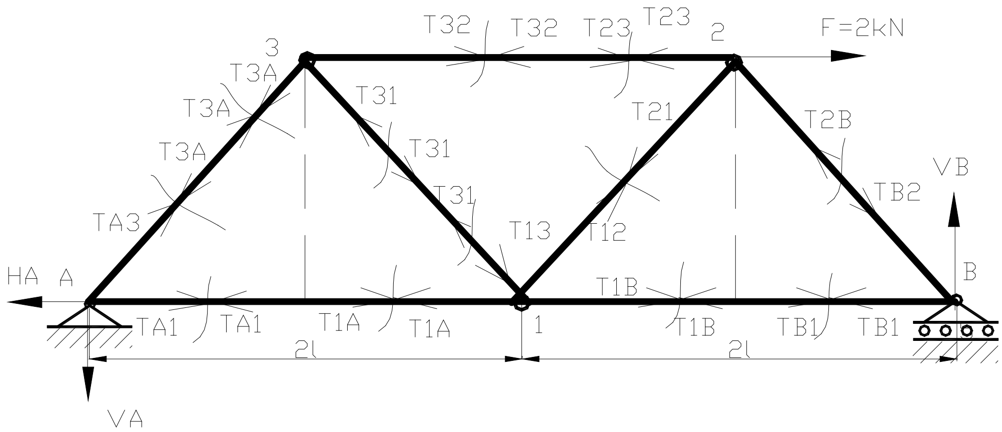


Figura 145

Aflăm eforturile T_{A1} , T_{A3} din $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$,

$\sum F_x = 0; H_A - T_{A3}.\cos 45^0 - T_{A1} = 0$;

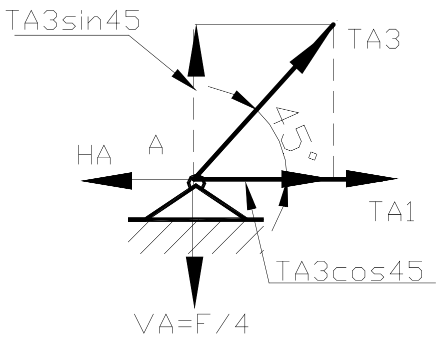


Figura 146

$\sum F_y = 0; V_A - T_{A3}.\sin 45^0 = 0; T_{A3} = \dfrac{F}{4.\sin 45^0} = \dfrac{F.\sqrt{2}}{4};$; şi din

$H_A - T_{A3}.\cos 45^0 - T_{A1} = 0; T_{A1} = \dfrac{3F}{4};$ acum se trece la nodul (3) .

Nodul (3)

$\sum F_x = 0; T_{32} + T_{31}.\cos 45^0 - T_{3A} \sin 45^0 = 0$; $T_{32} + T_{31}.\cos 45^0 = \dfrac{F}{4}$

;

$\sum F_y = 0; T_{31}.\sin 45^0 + T_{3A} \cos 45^0 = 0; T_{31} = -\dfrac{F\sqrt{2}}{4}; T_{32} = \dfrac{F}{2};$

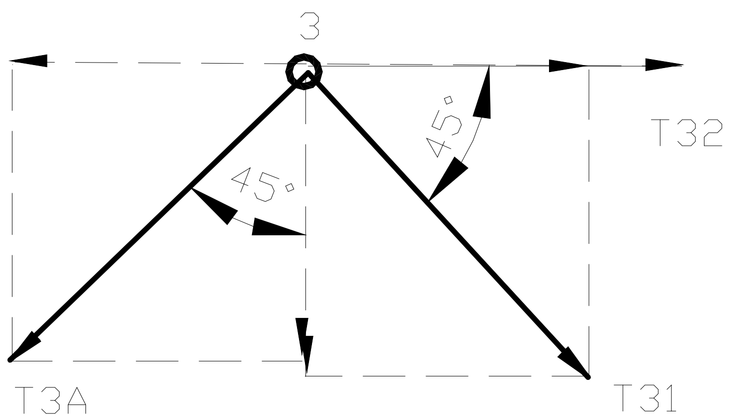


Figura 147

Notă:

$T_{31} = -\frac{F\sqrt{2}}{4}$; prima dată s-a ales un sens arbitrar, dacă din calcul dă plus rezultă că sensul este cel iniţial, dacă dă minus îi schimbăm sensul .

Având toate eforturile din noduri calculate, trebuie să punem şi eforturile care acţionează în bare, ca regulă se spune că dacă efortul iese din nod , în bară avem efort de întindere şi dacă intră în nod avem efort de compresiune (în bara 3-1 din figura 149) , T_{31} intră în nodul (3) , iar în bară există efort de compresiune.

Condiţiile de echilibru pentru nodul (1) sunt:

$$\sum F_x = 0; \frac{3F}{4} - T_{13}.\cos 45^0 - T_{12}\cos 45^0 - T_{1B} = 0$$

$$\sum F_y = 0; T_{13}.\sin 45^0 - T_{12}\sin 45^0 = 0; T_{13} = T_{12}; T_{12} = \frac{F\sqrt{2}}{4} \ ;$$

$$T_{1B} = \frac{F}{4} \ ;$$

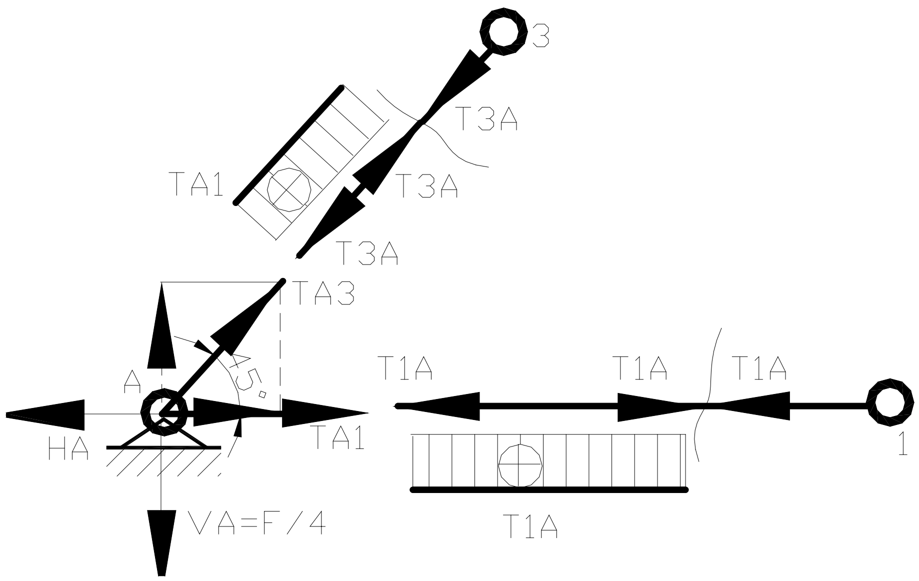


Figura 148

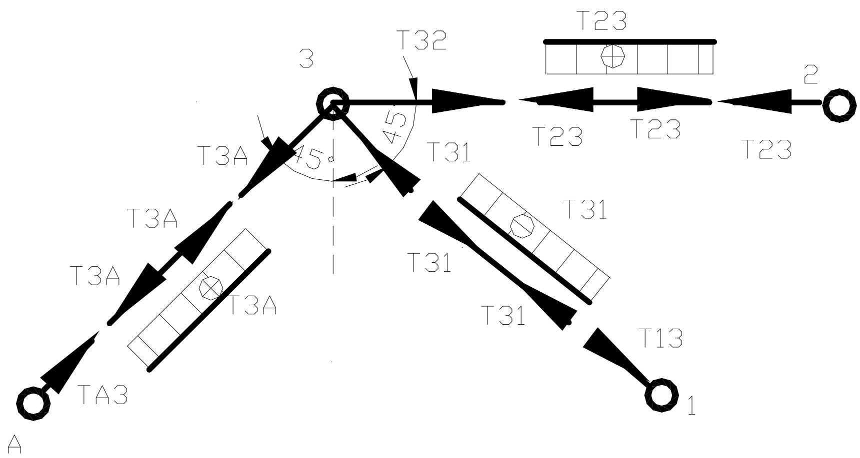


Figura 149

Nodul din punctul (B)

$\sum F_x = 0; T_{B1} + T_{B2}\cos 45^o = 0; T_{B2} = -\frac{T_{B1}}{\cos 45^o} = -\frac{F\sqrt{2}}{4};$ a dat cu semnul minus trebuie să-i sensul. Pentru a două ecuaţie de echilibru , $\sum F_y = 0$, nu este nimic de calculat , ci se verifică **:**

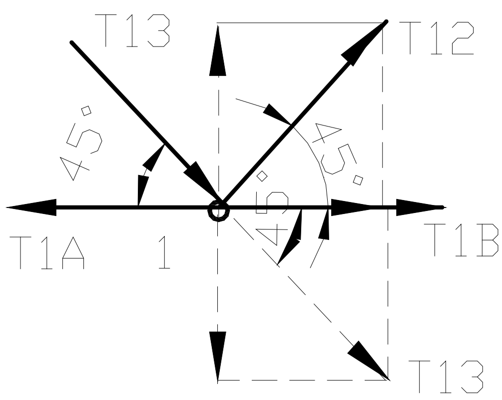


Figura 150

$V_B + T_{B2}\sin 45^o = 0; -\frac{F\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{F}{4} = 0; 0 = 0;$ se verifică , implică calculul corect al eforturilor din bare. A rămas nodul (2) , dar acest

nod este de verificare, pentru că nu mai este nimic de calculat, în bara (2-B) există efort de compresiune:

$$T_{2B} = \frac{F\sqrt{2}}{4}; T_{23} = \frac{F}{2}; T_{21} = \frac{F\sqrt{2}}{4};$$

$$\sum F_x = 0; T_{23} + T_{2B}\cos 45^o - F + T_{21}\cos 45^o = 0; 0 = 0$$

$$\sum F_y = 0; T_{21}.\sin 45^0 - T_{2B}\sin 45^0 = 0; T_{2B} = T_{12}; \frac{F\sqrt{2}}{4} = \frac{F\sqrt{2}}{4}; 0 = 0;$$

barele se pot dimensiona, verifica în mod obişnuit .

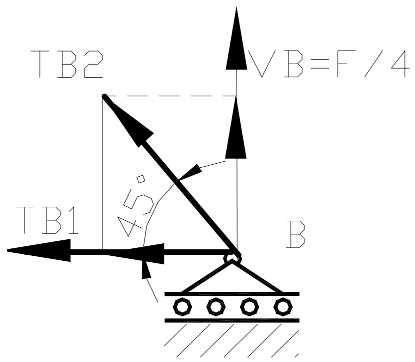


Figura 151

T_{A1} = 3F/4 este maxim. $d = \sqrt{\frac{4.N_{max}}{\pi.\sigma_a}} = \sqrt{\frac{4.0,75.2.10^3 N}{\pi.104\frac{N}{mm^2}}} = 4,21 mm$; se adoptă d = 5 mm .

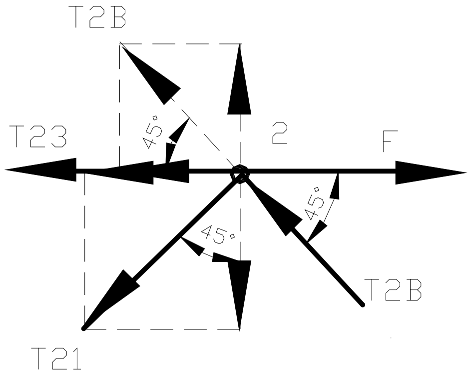


Figura 152

9.2.2. Metoda izolării nodurilor –metoda grafică

Un nod este în echilibru când poligonul tuturor forţelor care acţionează în nod este închis, această metodă se aseamănă cu metoda izolării nodurilor –calculul analitic, pentru că se pot determina maxim două necunoscute într-un nod. Eforturile necunoscute au numai direcţia determinată , fiind dată de direcţia barelor în care acţionează , mai rămâne să se afle mărimea şi sensul lor, sensul se ia arbitrar, dacă din calcul rezultă pozitiv, implică sensul iniţial, dacă dă cu minus îi schimbăm sensul. Determinarea reacţiunilor se obţine din închiderea poligonului forţelor şi a poligonului funicular sau direct din condiţiile de echilibru ale barei.

Problema nr.2

Să se afle eforturile din barele grinzii cu zăbrele încărcată ca în figura 153 :

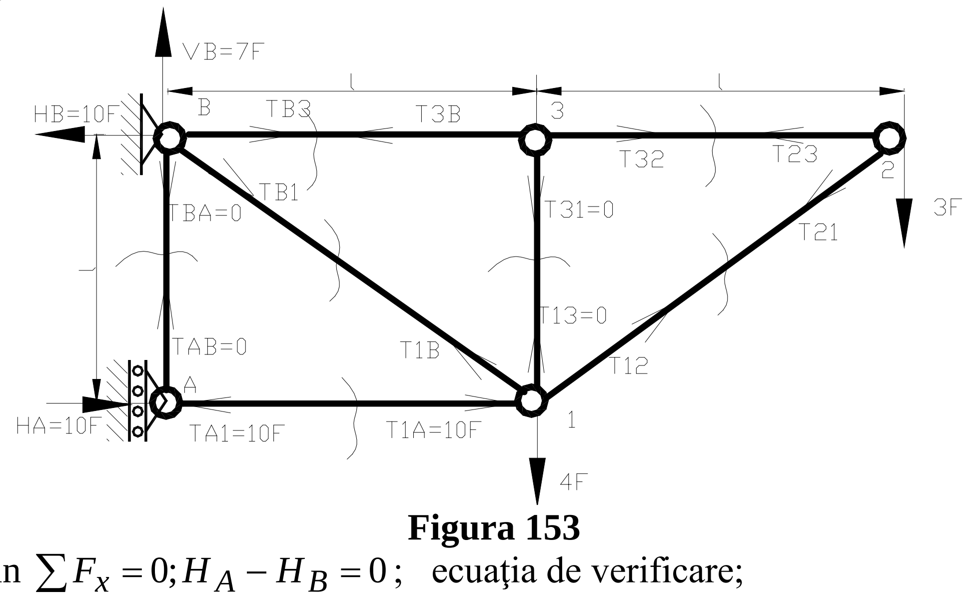


Figura 153

Din $\sum F_x = 0; H_A - H_B = 0$; ecuaţia de verificare;

$\sum F_y = 0; V_B = 7F$;

$\sum M_{iz}(A) = 0; 3F * 2l + 4Fl - H_B * l = 0; H_B = 10F$;

$\sum M_{iz}(B) = 0; 3F * 2l + 4Fl - H_A * l = 0; H_A = 10F$; $H_A - H_B = 0$;

10F – 10F =0 ;

Nodul din punctul (A)



Figura 154

Direcţia efortului din bara (A -1) se ştie că este paralelă cu (A-1) , la fel direcţia efortului din bara (A-B) este paralelă cu (A-B) **.** Trebuie să se închidă poligonul , $T_{AB} = 0$ din nodul (A) .
Se trece în nodul (B) , în nodul (1) nu se poate trece pentru că avem de determinat trei eforturi (T_{1B} ; T_{13} şi T_{12}) , într-un nod se pot determina maxim două necunoscute.

Nodul din punctul (B)

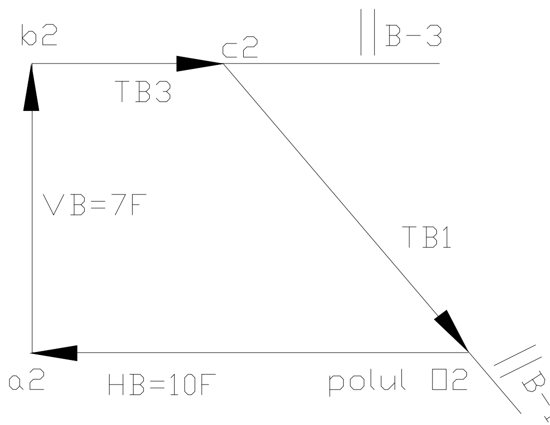


Figura 155

Se alege un pol (O_2) la întâmplare , se duce $H_B = 10$ F şi avem $\vec{H}_B = \vec{O}_2 a_2 = 10\vec{F}$, din a_2 se duce $a_2\vec{b}_2 = \vec{V}_B = 7\vec{F}$;punctul b_2 este determinat, din b_2 se duce o paralelă cu bara (B-3), din polul (O_2) cunoscut se duce o paralelă cu (B-1) şi aceste două drepte se intersectează în punctul (c_2) , s-au determinat eforturile care acţionează în nodul (B) .
Poligonul forţelor s-a închis , pentru că forţele care acţionează într-un nod trebuie sa fie în echilibru, să fie parcurs într-un singur sens , lucrând la o anumită scară se iau din desen mărimea eforturilor determinate $\left(b_2\vec{c}_2 = \vec{T}_{B3}; c_2\vec{O}_2 = \vec{T}_{B1}\right)$

Nodul din punctul (3)

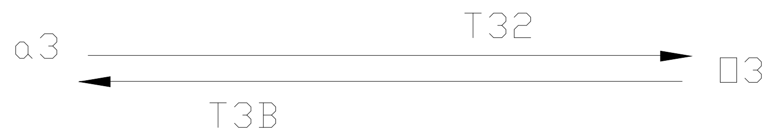


Figura 156

$\left(a_3\vec{O}_3 = \vec{T}_{32}; \vec{O}_3 a_3 = \vec{T}_{3B}\right)$; în bara verticală efortul este zero , pentru a se închide poligonul avem : $\vec{T}_{3B} + \vec{T}_{32} = \vec{0}; \vec{T}_{32} = -\vec{T}_{3B};$

Nodul din punctul (1)

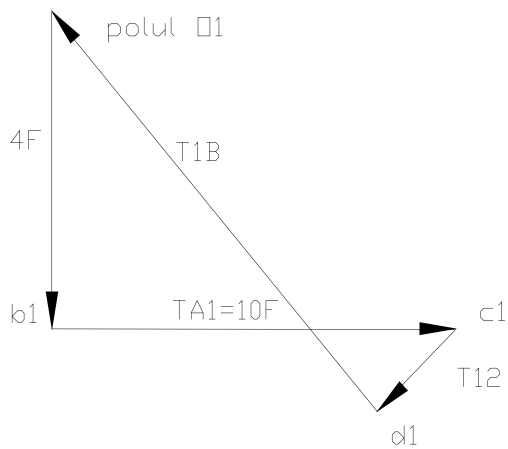


Figura 157

Se alege un pol oarecare (O_1), din acest pol s-a dus $\vec{O}_1 b_1 = 4\vec{F}; \vec{b}_1 c_1 = 10\vec{F}$, din punctul(c_1) s-a dus o paralelă cu bara (1-2) , apoi din punctul O_1se duce o paralelă cu bara (1-B) din intersecţia lor rezultă punctul (d_1), de unde $\vec{T}_{1B} = \vec{O}_1 d_1; \vec{T}_{12} = \vec{c}_1 d_1;$

Nodul din punctul (2)

Nodul acesta este de verificare, dacă se închide poligonul forţelor care acţionează în el, rezultă calculul corect al eforturilor din bare, dacă nu se închide atunci se greşeşte pe undeva la calculul grafic.

Metoda izolării nodurilor –calculul grafic este o metodă relativ greoaie, pentru că trebuie să luăm ficare nod în parte, la fiecare nod îi

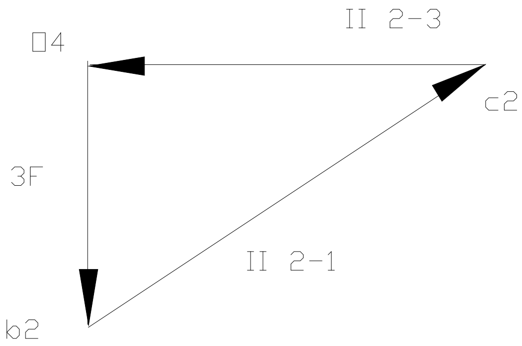


Figura 158

construim un poligon al forţelor şi o forţă intră de câte două ori, implică prezenţa unei forţe în două poligoane .
Pentru a înlătura acest inconvenient se ajunge la o metodă numită epura Cremona, pentru construirea epurei Cremona se procedează în două feluri şi anume: prin notarea barelor şi notarea spaţiilor.

9.2.3. Construcţia epurei Cremona prin notarea barelor

În poligonul forţelor nu trebuie sa utilizăm săgeţi pentru sensul eforturilor , se pun săgeţile în figura grinzii cu zăbrele , deasemenea se alege un sens de parcurs al grinzii cu zăbrele.

Problema nr.3

Să se afle eforturile din barele grinzii cu zăbrele, aflată în figura 159.
Aflăm forţele de reacţiune: V_A, V_B , H_A din condiţiile de echilibru ale grinzii:
$\sum F_x = 0; H_A - F = 0; H_A = F; \sum F_y = 0; V_A + V_B = 3F$, ecuaţia de verificare.
$\sum M_{iz}(B) = 0; (V_A - 3F)l + F * 2l = 0; V_A = F;$
$\sum M_{iz}(A) = 0; F * 2l - V_B * l = 0; V_B = 2F;$
$V_A + V_B = 3F; F + 2F = 3F; 0 = 0$;
este îndeplinită ecuaţia de verificare , deci sau calculat corect forţele de reacţiune V_A , V_B.
La început se construieşte poligonul forţelor exterioare (active şi de reacţiune) abordândule tot cu acelaşi sens , noi am ales sensul acelor

de ceasornic, pe acest schelet se construiesc poligoane care o să genereze o figură generalizatoare.
Sunt în total (9) bare numerotate de la 1-9 , alegem unsens arbitrar de parcurs al tuturor nodurilor , în cazul acesta s-a ales sensul acelor de ceasornic .
Se începe din nodul (G) unde sunt numai două eforturi necunoscute şi anume eforturile din barele (8) , (9) , luăm un pol oarecare pentru a construi poligonul forţelor. In nodul (G) prima forţă cunoscută este (3F) , apoi se trece la efortul din bara (8) urmează efortul din bara (9) .

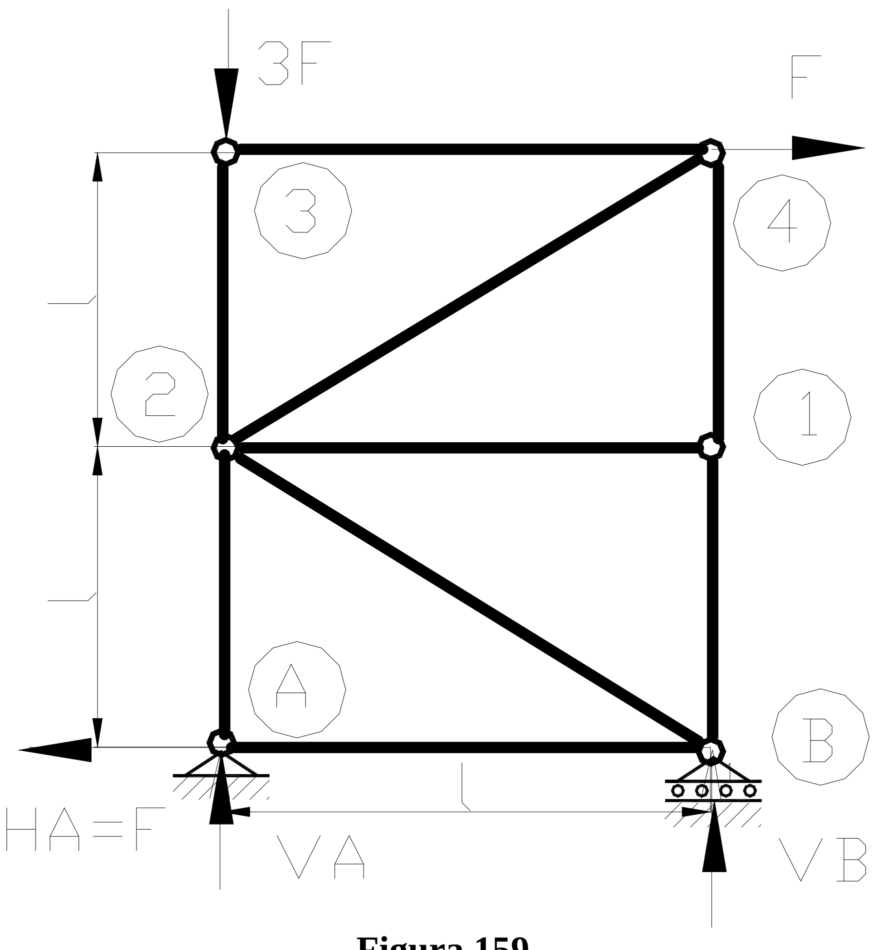


Figura 159

Trecem la nodul (E) şi din aproape în aproape se determină toate eforturile din bare, în această metodă nu se mai face câte un poligon al

forţelor pentru fiecare nod în parte,ci o figură generalizatoare care cuprinde toate poligoanele de forţe ale tuturor nodurilor. Eforturile din figura generalizatoare s-au notat cu numerele barelor pentru a fi mai uşor de urmărit şi de scos mărimea fiecărui efort din desen , deci în mod indirect trebuie să se lucreze la o anumită scară. S-au pus numai sensurile forţelor exterioare (active sau de reacţiune) , restul sensurilor se văd din desenul grinzii cu zăbrele.

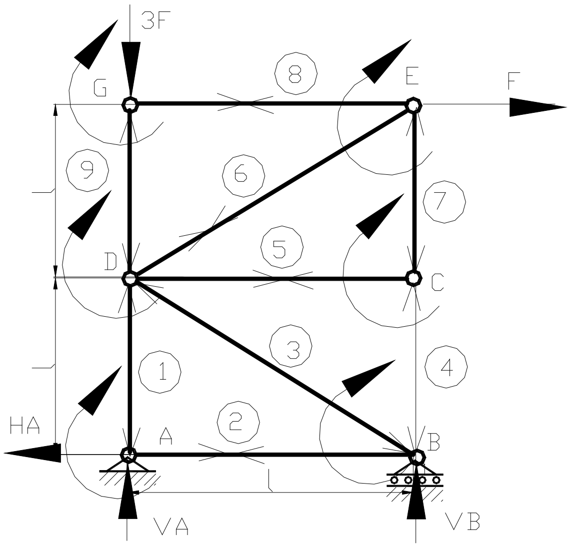
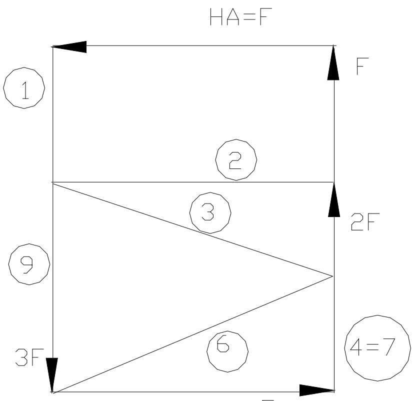


Figura 160



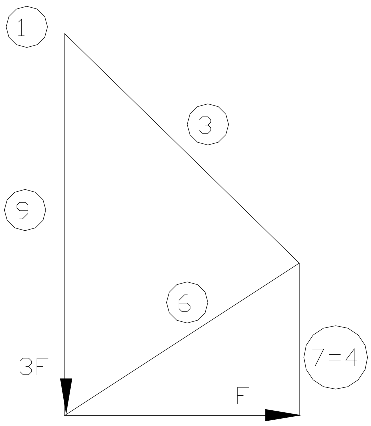


Figura 161 **Figura 162**

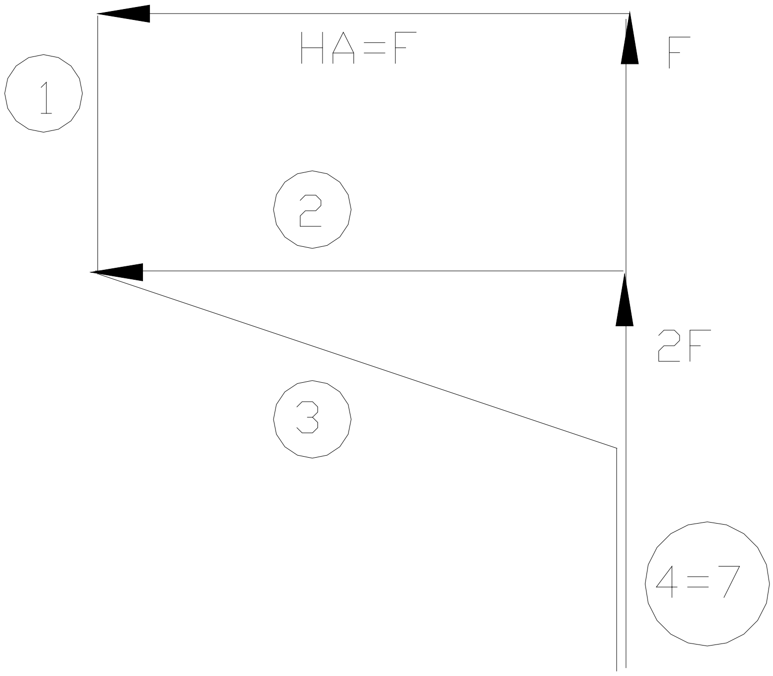


Figura 163

9.2.4. Construcţia epurei Cremona prin notarea regiunilor

Această metodă construieşte o figură generalizatoare cuprinzând poligoanele de forţe ale tuturor nodurilor, un efort al unei bare se determină cu ajutorul unor câmpuri, câmpurile se notează cu litere ca în figură, se porneşte dintr-un nod , alegâduse un sens de parcurgere al nodurilor care rămâne neschimbat în timpul rezolvării problemei. În această problemă s-a ales sensul acelor de ceasornic, forţa $\vec{H}_B = e\vec{d}$ se află la intersecţia câmpurilor (e) şi (d) , forţa $\vec{V}_A = 3\vec{F} = d\vec{g}$ se află la intersecţia câmpurilor (d) şi (g) în mod analog forţa $3\vec{F} = f\vec{e}$ se află la intersecţia câmpurilor (f) şi (e). Rezultă că eforturile din bare se scriu ca intersecţie de două câmpuri , se porneşte dintr-un nod care are cel mult două necunoscute , pentru că în cazul când va exista mai mult de două necunoscute nu se pot calcula , deci va rezulta un sistem incompatibil . Sensurile se trec pe figura grinzii

cu zăbrele , deci nu se trec în figura generalizatoare a poligoanelor forţelor.

Problema nr.4

$V_A = 3F; \quad H_A + H_B = 0;$ ecuaţia de verificare , aflăm pe H_A şi H_B din sumă de momente faţă de orice punct din plan sau spaţiu fiind egal cu zero. $\sum M_{iz}(B) = 0; -3F * 3l + 3F * l - H_A * l = 0; H_A = -6F;$
$\sum M_{iz}(A) = 0; -3F * 2l + H_B l = 0; H_B = 6F;$
$H_A + H_B = 0; -6F + 6F = 0; 0 = 0$, fiind îndeplinită ecuaţia de verificare .

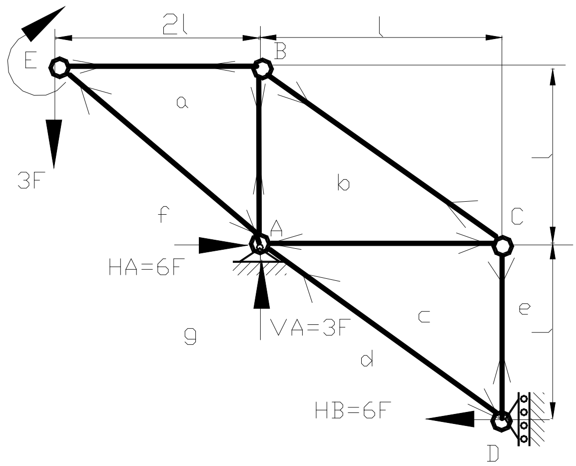


Figura 164

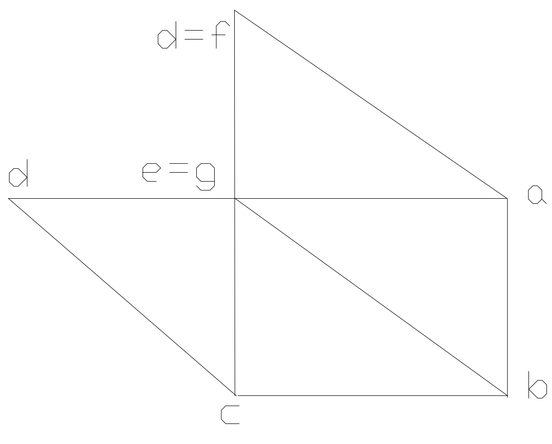


Figura 165

9.2.5. Metoda analitică a sectiunilor- Metoda Ritter

Metoda izolării nodurilor cât si metoda Cremona prezintă un dezavantaj mare atunci când pe noi ne interesează numai eforturile din anumite bare nu din toate barele. În cazul când ne interesează efortul numai dintr-o bară se secţionează grinda cu zăbrele printr-o secţiune ce taie bara care ne interesează . Grinda cu zăbrele se desface în două părţi , aceste parţi trebuie să fie în echilibru , punând în secţiunile respective eforturile interioare care trebuiesc determinate. Traseul de secţionare poate cuprinde 2,3 sau mai munlte bare , în cazul când sunt mai mult de trei bare secţionate , trebuiesc ca celelalte bare să se interesecteze şi să scrie o ecuaţie de moment $\sum M_{iz} = 0$ faţă de punctul de intersecţie al barelor şi în felul acesta se determină efortul unitar interior necunoscut.

Problema nr .5

Să se determine efortul T 10-11 pentru grinda cu zăbrele din figura 166 :

$\sum Fx = 0$; $H_1 - 2F = 0$; $H_1 = 2F$; $\sum Fy = 0$;

$V_1 + V_5 = F - 9F + 5F = 0$; $V_1 + V_5 = 5F$ ecuaţia de verificare.

$\sum M_{iz}(1) = 0$; $-2F.2l + 9F.3l - (V_5 + 5F).7l = 0$;

$-4F + 27F - 7V_5 - 35F = 0$; $7V_5 = -12F$; $V_5 = -\dfrac{12}{7}F$;

$\sum M_{iz}(5) = 0$; $(V_1 - F)7l - 2F.2l - 9F.4l = 0$; $\sum M_{iz}(5) = 0$;

$(V_1 - F)7l - 2F.2l - 9F.4l = 0$; $7V_1 - 7F - 4F - 36F = 0$;

$V_1 = \dfrac{47}{7}F$; $V_1 + V_5 = \dfrac{47}{7}F - \dfrac{12}{7}F = \dfrac{47F - 12F}{7} = \dfrac{35F}{7} = 5F$ este îndeplinită ecuaţia de verificare , s-au calculat corect forţele de reacţiune. Deoarece $V_5 = -\dfrac{12}{7}F$ trebuie să-i schimbăm sensul.

Când am secţionat , am luat sensul eforturilor din bară la întâmplare ; dacă din calcul dă cu plus , rezultă că am sensul ales iniţial, dacă dă cu minus , îi schimbăm sensul. Pentru a afla efortul din bara 11 – 10,

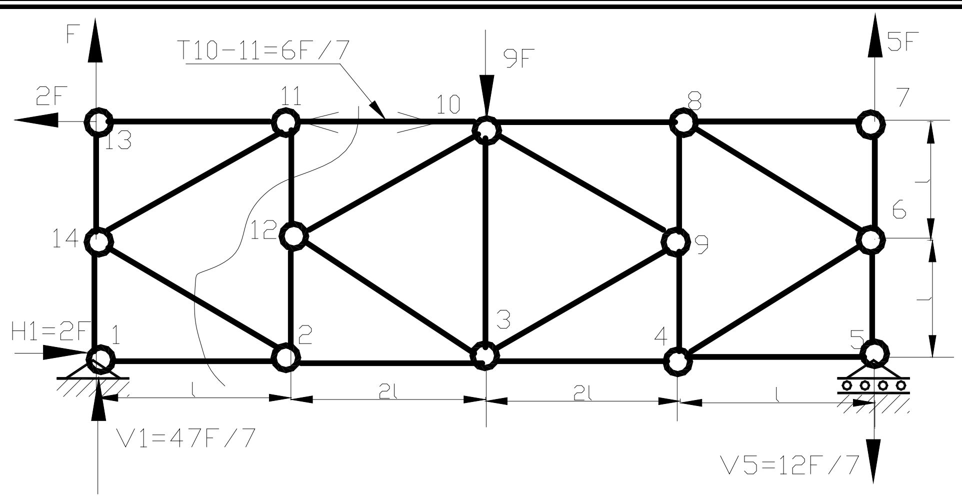


Figura 166

adică T_{11-10}, se scrie $\sum M_{iz}(2)=0$. În nodul 2, toate eforturile necunoscute T_{2-1} , T_{2-14} , T_{2-12}

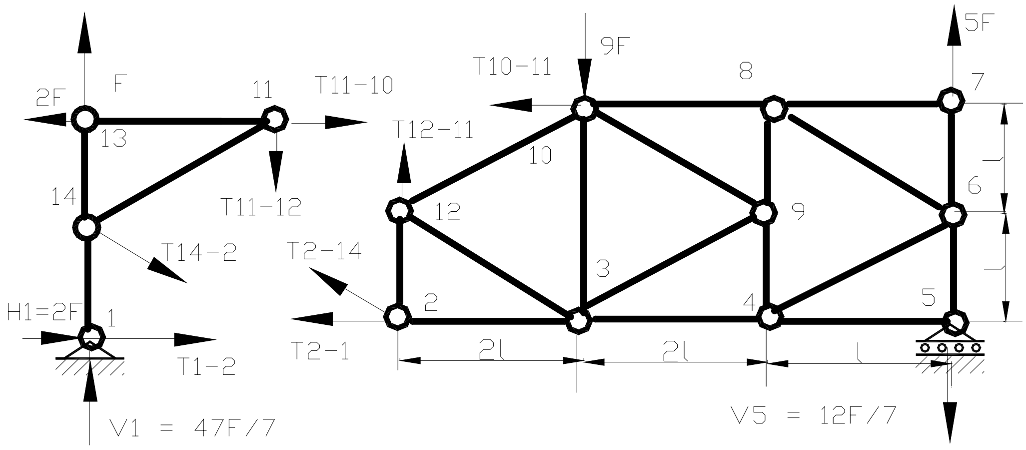


Figura 167

şi T_{23} se intersectează. Noi luăm partea dreaptă şi scriem

$$\sum M_{iz}(2)=0 \quad ; \quad -T_{10-11}2l+9F.2l-\left(5F-\frac{12F}{7}\right)6l=0 \ ;$$

$18F - \left(\frac{35-12}{7}\right)6F = 2T_{10-11}$; $F\left[18 - \frac{138}{7}\right] = T_{10-11}$;

$-F\frac{12}{7} = 2T_{10-11}$; $T_{10-11} = -\frac{6}{7}F$; îi schimbăm sensul , va intra în nodul 10.

Problema nr.6

Să se determine eforturile din barele 6 – 4, 5 – 4 , pentru grinda cu

zăbrele din figur169 .

Rezolvare: $\sum Fx = 0$; $H_2 = 3F$; $V_1 + V_2 = F$ ecuaţia de verificare.

$\sum M_{iz}(1) = 0$; $3F.6l - (V_2 - F)2{,}5l = 0$;

$18F - 2{,}5V_2 + 2{,}5F = 0$; $V_2 = \frac{20{,}5F}{2{,}5} = 8{,}2F$. $\sum M_{iz}(2) = 0$;

$V_1.2{,}5l + 3F.6l = 0$; .

$V_1 = -\frac{18}{2{,}5}F = -7{,}2F$ **.** Se ia partea de deasupra şi se scrie :

$\sum M_{iz}(5) = 0$; $3F.l - T_{6-4}.2{,}5l = 0$; $T_{6-4} = \frac{3F}{2{,}5}$; $T_{6-4} = 1{,}2F$;

Atenţie , pentru a afla pe T_{5-4}, $tg\alpha = \frac{2{,}5}{3} = 0{,}833$

$\alpha = 39{,}794298^o$; se face pentru partea de sus $\sum Fx_{sus} = 0$. Nu se face $\sum Fy_{sus} = 0$
pentru că avem şi celelalte necunoscute , fiind eforturile din barele 5 – 3 şi 6 – 4. Deci $\sum Fx_{sus} = 0$; $3F - T_{5-4}\sin\alpha = 0$;

$T_{5-4} = \frac{3F}{\sin\alpha}$; $\sin 39{,}794298^o = 0{,}640033$;

$T_{5-4} = \frac{3F}{0{,}640033} = 4{,}687258.F$;

$T_{5-4} = 4{,}687258F$ fiind efortul căutat.

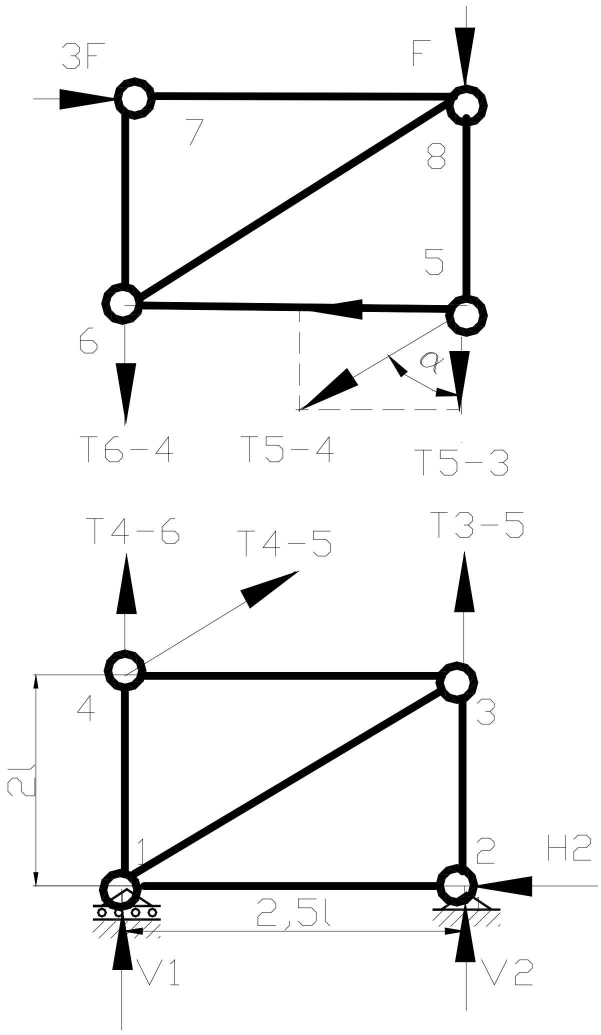


Figura 168

<u>Notă :</u>

La această problemă s-a folosit şi condiţia de echilibru $\sum M_{iz} = 0$.
Când se secţionează grinda cu zăbrele în două părţi , trebuie să fie în echilibru. Condiţiile de echilibru sunt : $\begin{cases} \sum Fx = 0 \\ \sum Fy = 0 \\ \sum M_{iz} = 0 \end{cases}$;

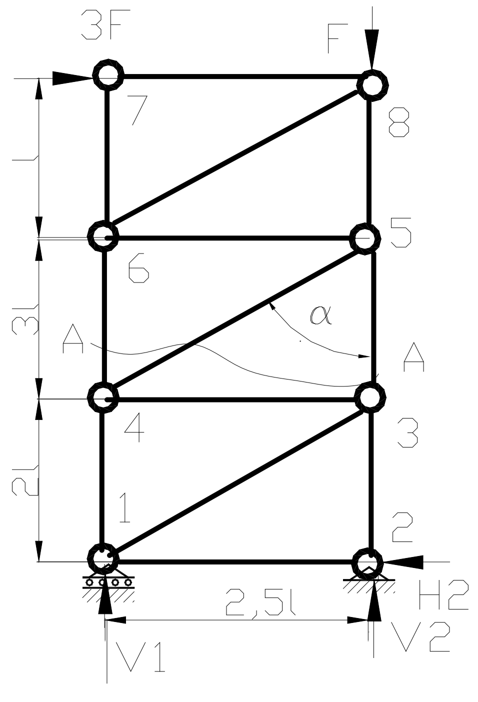


Figura 169

<u>9.3.</u> <u>Deformaţia grinzilor cu zăbrele</u>

În barele grinzilor cu zăbrele iau naştere numai eforturi axiale. Eforturile axiale de întindere sau compresiune, acţionând asupra barelor , le modifică lungimea (se lungesc sau se scurtează), deformându-se elastic. Datorită variaţiei lungimii barelor au loc deplasări ale nodurilor , care provoacă şi rotirea barelor. , în general , se calculează deplasările nodurilor – săgeata grinzii într-un anumit

punct. Săgeata o putem afla cu ajutorul teoremei lui Castigliano. $dp = \sum_{i=1}^{n} \int_{(li)} \frac{N_i \cdot \frac{\partial . N_i}{\partial . F_p}}{A_i . E_i} dl_i$;

dp ; săgeata în nodul p , unde ne propunem s-o calculăm;

N_i ; efortul dintr-o bară oarecare I ;

$\frac{\partial N_i}{\partial F_p}$; derivata parţială a expresiei efortului din bara i , în raport cu forţa ce acţionează în nodul p ;

A_i = aria secţiunii transversale a barei i ;

E_i = modul de elasticitate longitudinală a materialului din bara i ;

l_i lungimea barei i .

<u>Notă</u> : Dacă în nodul p nu există o forţă concentrată, atunci se introduce o forţă fictivă concentrată F_{po} şi se calculează eforturile din barele grinzii cu zăbrele în funcţie de acestă forţă şi sarcinile de pe grindă. Apoi, după ce s-au efectuat derivatele parţiale $\frac{\partial N_i}{\partial F_{po}}$, se face $F_{po=0KN}$.

<u>Problema nr.7</u>

Să se calculeze deplasarea nodului 5 pe verticală. Toate barele au secţiunea circulară cu :d = 20mm . Se dau F = 2KN , $E = 2{,}1.10^5 MP_a$, $l = 0{,}21m$.

Rezolvare:

$\sum F_x = 0; H_1 + V_3 = 0$; ecuaţia de verificare .

$\sum F_y = 0; V_1 - F_2 - F_1 = 0; V_1 = F_2 + F_1$, se află H_1 şi V_3 din $\sum M_{iz}(oarecare) = 0$

$\sum M_{iz}(1) = 0; V_3 * 2l + F_2 * l + F_1 * 2l = 0; 2V_3 = -F_2 - 2F_1;$;

$V_3 = -2kN - F_1.$

$\sum M_{iz}(3) = 0; -H_1 * 2l + F_2 * l + F_1 * 2l = 0; H_1 = \frac{F_2 + 2F_1}{2};$, ecuaţia de

$H_1 = 2kN + F_1.$

verificare este îndeplinită , rezultă calculul corect al forţelor de reacţiune.

Aflăm toate eforturile din bară , prin metoda analitică a izolării nodurilor , se porneşte din nodurile unde există cel mult două necunoscute.

<u>Nodul din punctul (5)</u>

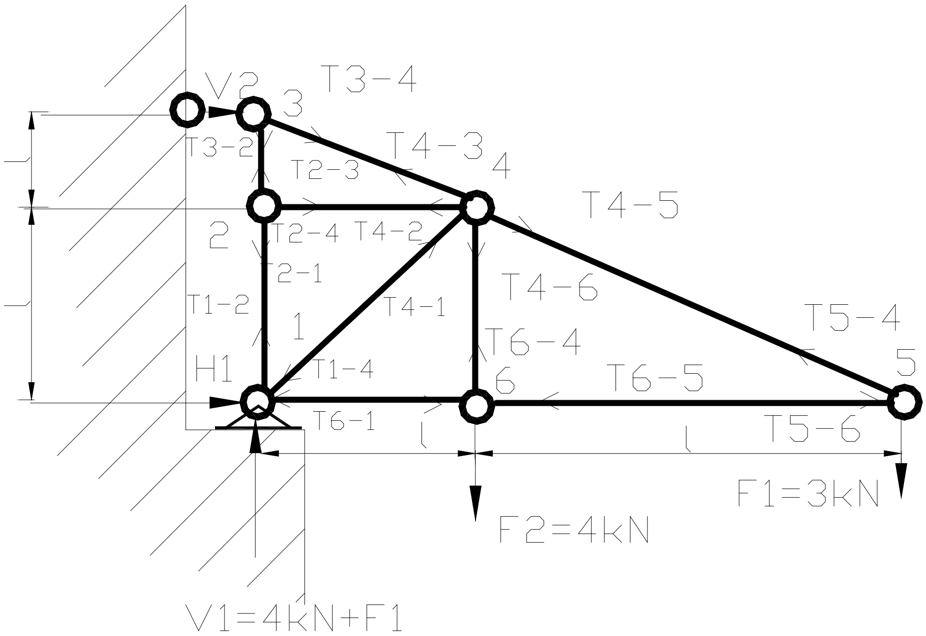


Figura 170

$\sum F_y = 0; T_{54} * \sin 45^o - F_1 = 0; T_{54} = 1{,}414 F_1;$ explcităm toate eforturile funcţie de F_1,literar , pentru că avem de făcut derivate parţiale funcţie de (F_1) , după aceea se înlocuieşte valoarea funcţiei (F_1 = 3 kN) . $\sum F_x = 0; T_{54} * \cos 45^o + T_{56} = 0; T_{56} = -F_1;$ deoarece T_{56} a dat cu minus îi schimbăm snsul , acum cu acest sens intră în nod.

<u>Nodul din punctul (6)</u>

Nodul din punctul (1)

$\sum F_y = 0; T_{64} - 4kN = 0; T_{64} = 4kN$;

$\sum F_x = 0; T_{61} - F_1 = 0; T_{61} = F_1$.

$\sum F_y = 0; T_{14} * \sin 45^o + T_{12} + V_1 = 0; T_{12} = -F_1 - 2kN$

$\sum F_x = 0; T_{14} * \cos 45^o - T_{16} + H_1 = 0; T_{14} = -2{,}828kN$

Nodul din punctul (2)

$\sum F_y = 0; T_{23} - T_{21} = 0; T_{23} = -F_1 - 2kN$; $\sum F_x = 0; T_{24} = 0$.

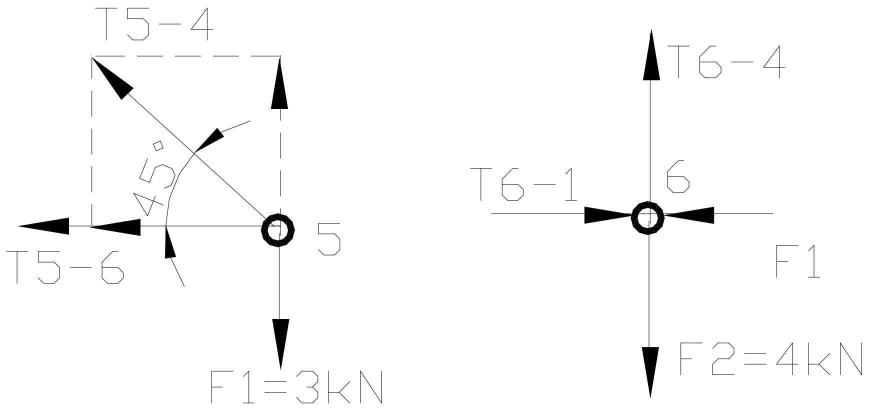


Figura 171

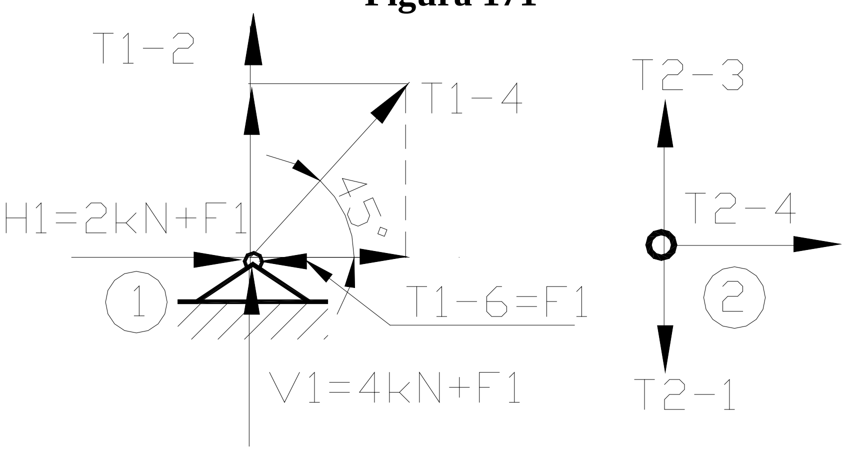


Figura 172

Nodul din punctul (3)

$\sum F_y = 0; T_{34} * \cos 45^o + T_{32} = 0; -F_1 - 2kN + (2{,}828kN + 1{,}414F_1)\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$;

0=0; $\sum F_x = 0; T_{34} * \sin 45^o + V_3 = 0; T_{34} = 2{,}828kN + 1{,}414F_1$

Nodul din punctul (4)

$\sum F_y = 0; T_{43} * \sin 45^o + T_{41} \sin 45^o - T_{45} \cos 45^o - T_{46} = 0; 0 = 0$

verifică

$\sum F_x = 0; -T_{43} * \cos 45^o + T_{41} \cos 45^o + T_{45} \sin 45^o = 0; 0 = 0$; verifcă , în nodul se verifică dacă s-a făcut calculul corect . Dacă a dat efortul din bară a rezultat cu minus (-) şi nu s-a schimbat sensul (nu este obligatorie shimbarea de sens) , se lasă sensul iniţial ales dar trebuie

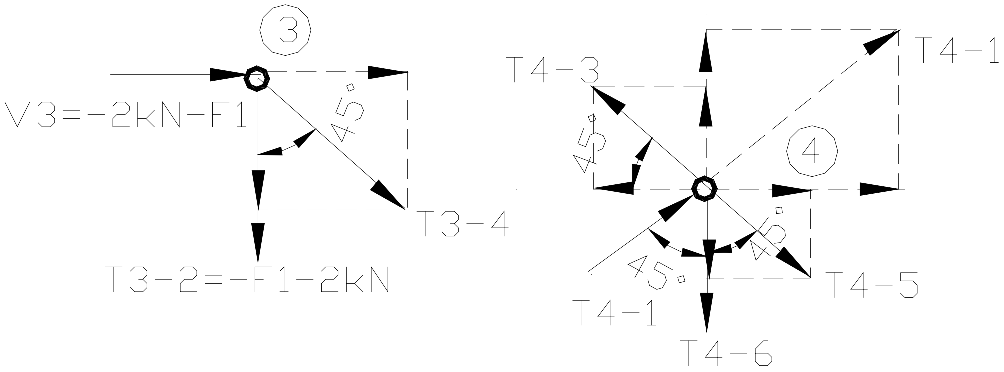


Figura 173

să se ţină cont că mărimea efortului este negativ , în această problemă nu s-a schimbat sensul pentru că valoarea lui (F_1) poate fi oarecare . Este indicat să se facă tabelul , pentru a se nu se omite ceva în aplicarea teoremei lui Castigliano. $d_5 = \frac{\partial L}{\partial F_1} = \sum \int \frac{N(s)}{E_i A_i} \frac{\partial N(s)}{\partial F_1} ds_i$,

deplasarea nodului (5) pe verticală . $d_5 = \int_0^l \frac{F_1}{E_1 A_1}(1).ds_1 +$

$$\int_0^l \frac{F_1}{E_2 A_2}(1).ds_2 + \int_0^{l\sqrt{2}} \frac{1{,}414F_1}{E_3 A_3}(1{,}414).ds_3 + \int_0^l \frac{4kN}{E_4 A_4}(0).ds_4$$

$$+\int_0^{l\sqrt{2}}\frac{2{,}828kN}{E_5A_5}(0).ds_5+\int_0^{l}\frac{0kN}{E_6A_6}(0).ds_6+$$

$$\int_0^{l\sqrt{2}}\frac{2{,}828kN+1{,}414F_1}{E_7A_7}(1{,}414).ds_7+\int_0^{l}\frac{(-F_1-2kN)}{E_8A_8}(-1).ds_8+$$

$\int_0^{l}\frac{(-F_1-2kN)}{E_9A_9}(-1).ds_9$; $E_1A_1 = E_2A_2 = E_3A_3 = E_4A_4 = E_5A_5 = E_6A_6 = E_7A_7 = E_8A_8 = E_9A_9 = EA$, în acest caz particular.

Bara	Efortul din bare N(s)	$\frac{\partial N(s)}{\partial F_1}$	s $\in(...)$
1-6	F_1	1	(0;l)
6-5	F_1	1	(0;l)
5-4	1,414 kN	0	(0; l$\sqrt{2}$)
4-6	4 kN	0	(0; l)
4-1	2,828 kN	0	(0; l$\sqrt{2}$)
2-4	0	0	(0; l)
3-4	2,828 kN + 1,414 F_1	1,414	(0; l$\sqrt{2}$)
2-3	- F_1 – 2 kN	-1	(0; l)
2-1	- F_1 – 2 kN	-1	(0; l)

$$ds=\frac{F_1*l}{EA}+\frac{F_1}{EA}*l+\frac{(1{,}414)^2F_1}{EA}*l\sqrt{2}+\frac{(2{,}828kN+1{,}414F_1)}{EA}*(1{,}414)*l\sqrt{2}+$$

$+\frac{(F_1+2kN)*l}{EA}+\frac{(F_1+2kN)*l}{EA}$. Acum se înlocuieşte $F_1 = 3$ kN , de unde rezultă :

$d_5 = v_5 =$

$$\frac{38{,}617168kN*l}{EA}=\frac{38{,}617168*10^3N*0{,}21*10^3mm}{\frac{2{,}1*10^5N}{mm^2}*314mm^2}=0{,}12298mm;$$

$A = \frac{\pi . d^2}{4} = \frac{\pi}{4}(20mm)^2 = 314mm^2$. Pentru calculul deplasării pe verticală a unui nod se mai poate aplica şi formula :

$v = \sum N(s) \frac{\frac{\partial N(s)}{\partial F}}{A_i E_i} l_i$ fiind prima teorema a lui Castigliano aplicată în mod indirect.

Capitolul X

Trasarea diagramelor de eforturi pentru barele cotite

10.1. Generalităţi

Barele cotite sunt formate din mai multe bare drepte sau curbe , legate între ele prin noduri rigide ca în figura 174.

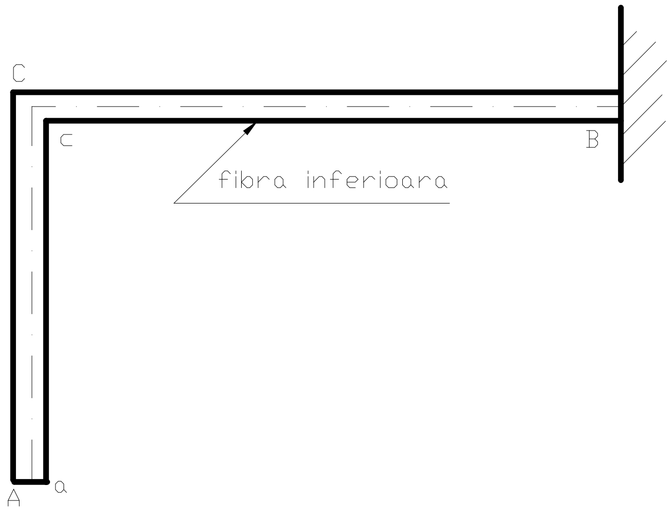


Figura 174

Nodul rigid este nodul ce nu permite rotirea unei bare faţă de alta .Se consideră moment încovoietor pozitiv când fibra interioară este întinsă şi moment încovoietor negativ când fibra interioară este comprimată, convenţia de semne pentru forţele tăietoere şi forţele axiale şi momente este aceeaşi ca la grinzile drepte. Sistemele static determinate poartă denumirea de grinzi cotite din figura 174, iar cele static nedeterminate se numesc cadre (figura 175) .

Se pune accent pe fibra inferioară , pentru semnele eforturilor interioare pozitive , regula de semne este aceeaşi de la barele drepte,

numai că aici regula se mi pentru fiecare tronson în parte , apoi reiese întrega bară cotită sau cadru .
La fel pentru început se studiază numai cele care au planul de acţiune al forţelor planul XOY şi momentele încovoietoare exterioare numai după axa OZ (M_{iz}) , în spaţiu se va aborda în volumul III.

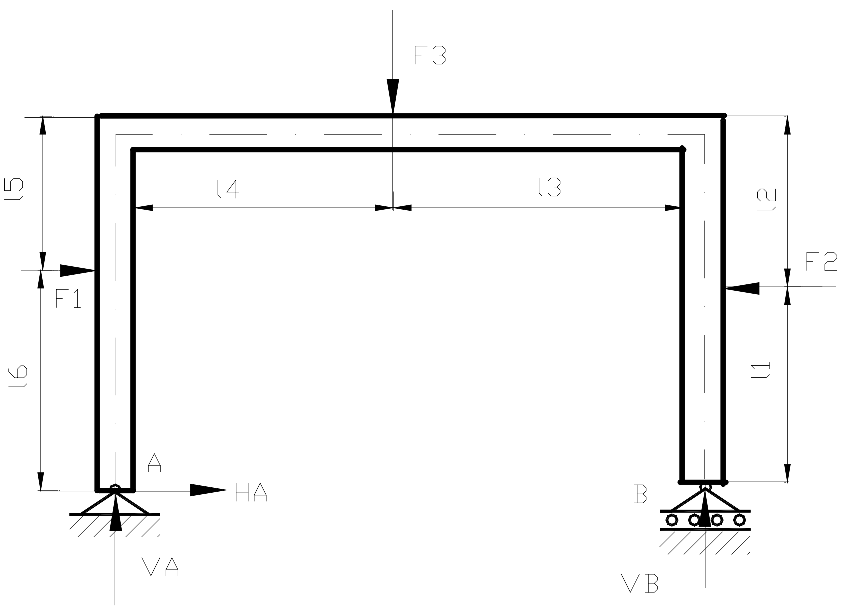


Figura 175

Problema nr.1

Să se traseze diagramele $\vec{N},\vec{T},\vec{M}$ pentru grinda cotită din figura 176.
Deoarece forţele exterioare (active şi de reacţiune) sunt în planul XOY , ele dau numai momente încovoietoare după axa OZ, adică M_{iz} .
Se află forţele de reacţiune V_A, H_A, V_B din condiţiile de echilibru:
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{iz} = 0 \end{cases}$$

$\sum F_x = 0; H_A + F - 9F = 0; H_A = 8F;$ $\sum F_y = 0; V_A + V_B = 7F;$ fiind ecuatia de verificare , se află forţele de reacţiune V_A , V_B din

$\sum M_{iz}(oarecare) = 0;$

$\sum M_{iz}(A) = 0; F.2l + 7F.2l - 9F.l - V_B.5l = 0; V_B = \dfrac{7F}{5};$

$\sum M_{iz}(B) = 0; F.2l - 7F.3l - 9F.l + V_A.5l = 0; V_A = \dfrac{28F}{5};$

$V_A + V_B = 7F;$ **ecuaţia de verificare,**

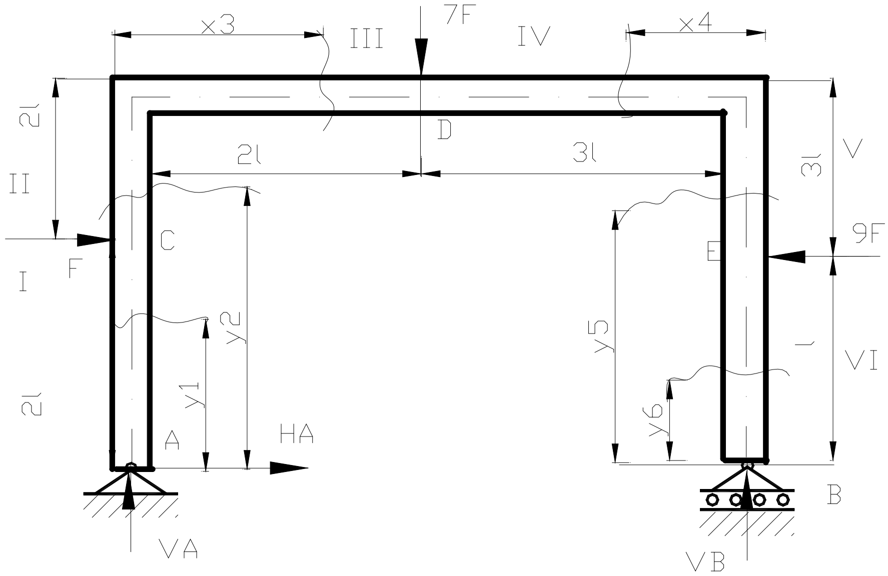


Figura 176

$\dfrac{28F}{5} + \dfrac{7F}{5} = 0; 0 = 0,$ este îndeplinită ecuaţia de verificare , deci s-au calculat corect forţele de reacţiune V_A şi V_B.Forţele concentrate , momentele concentrate , forţele distribuite , momentele distribuite împart grinda cotită în regiuni, atunci când secţionăm grinda cotită o desfacem în două părţi , iar în secţiunile respective punem eforturile interioare, se scriu condiţiile de echilibru , deci se procedează în mod analog ca la barele drepte, originea se ia faţă de unul din capetele grinzii.

Regiunea întâi

$y_1 \in (0;2l); N(y_1) = -\frac{28F}{5}; T(y_1) = -8F; M_{iz}(y_1) = -8F.y_1;$

din figura 179 . $\lim_{y_1 \downarrow 0} M_{iz}(y_1) = 0; \lim_{y_1 \uparrow 2l} M_{iz}(y_1) = -16Fl$

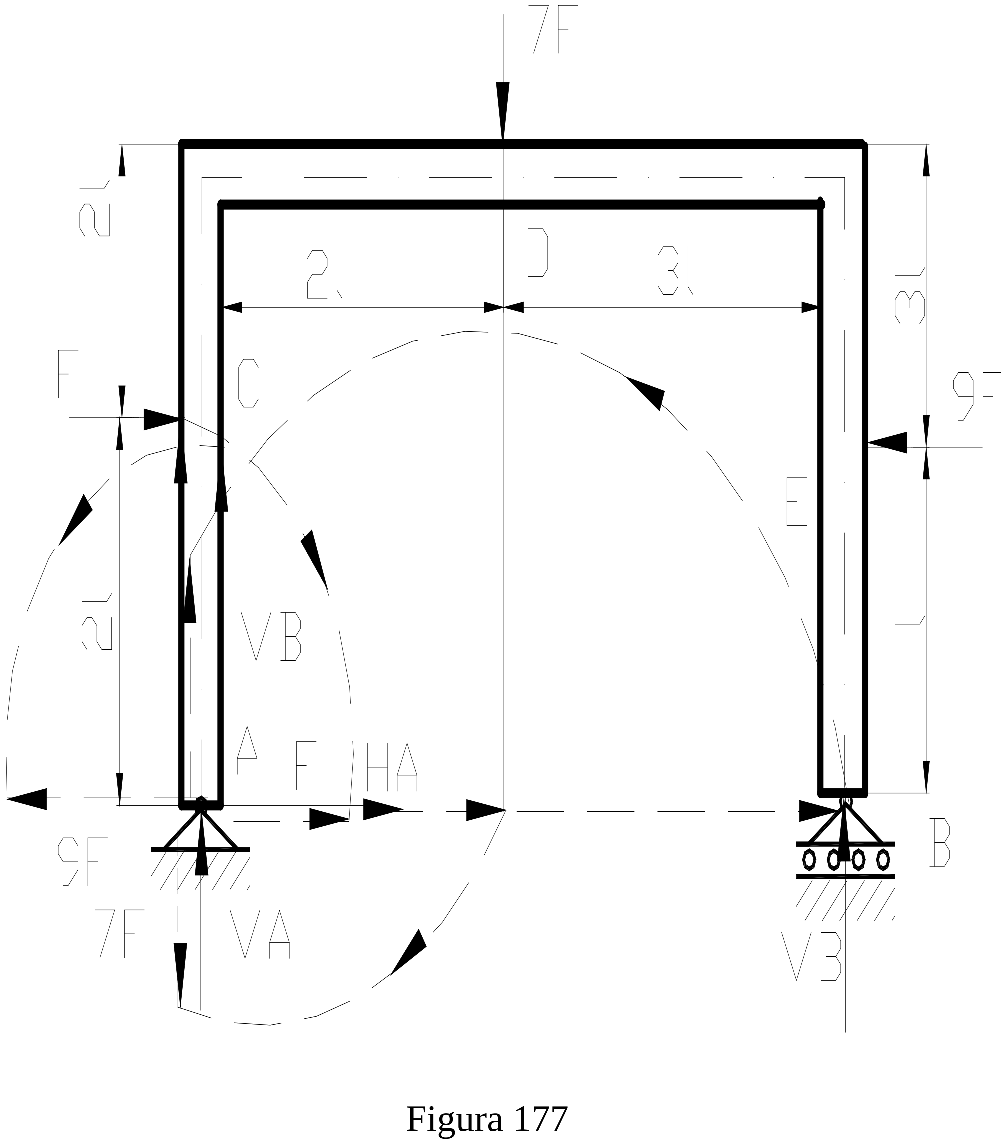


Figura 177

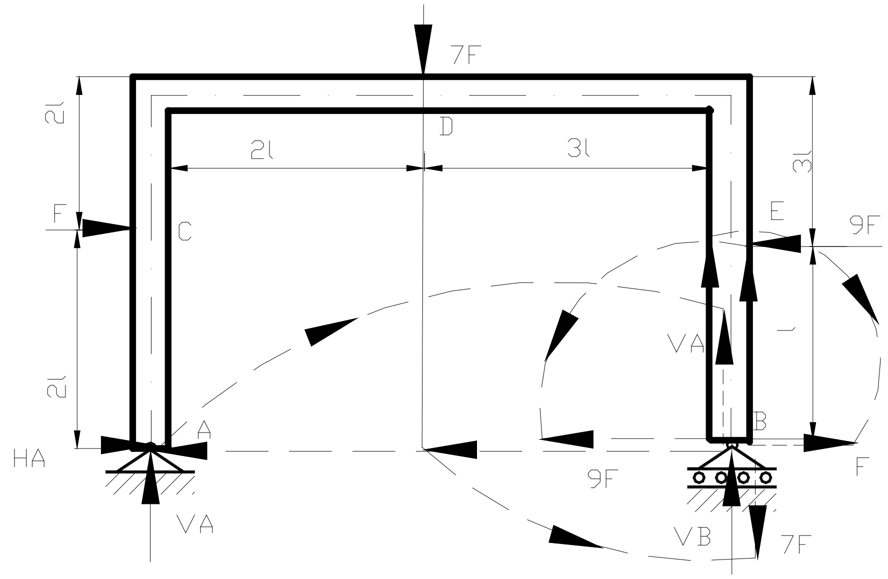


Figura 178

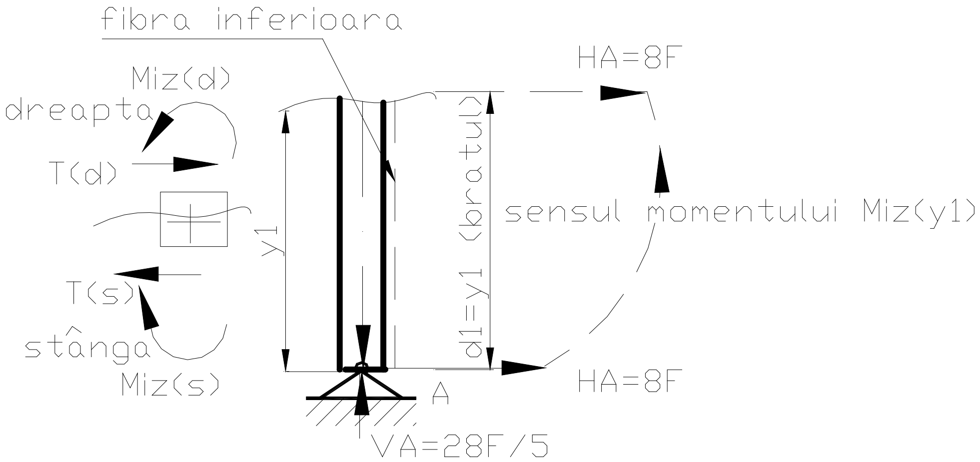


Figura 179

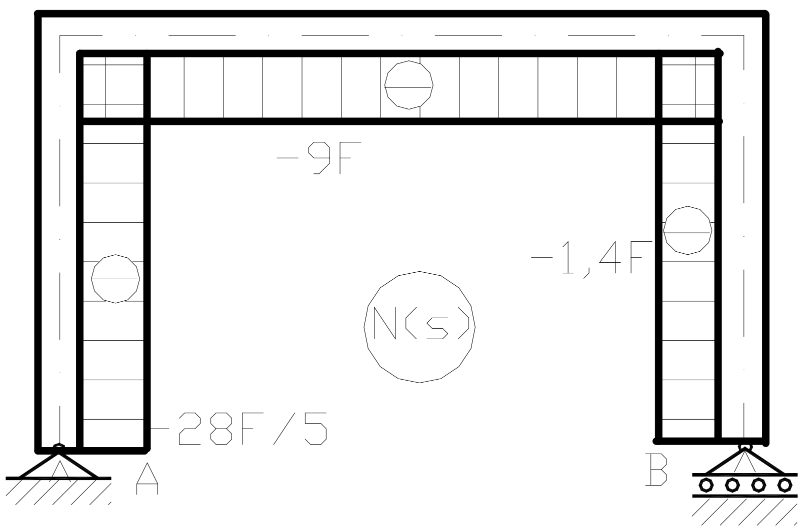


Figura 180

Eforturile sunt perpendiculare pe bară , pentru că se trasează graficul în planul [N(s) :OX] , în mod analog se gândeşte şi pentru celelalte eforturi .

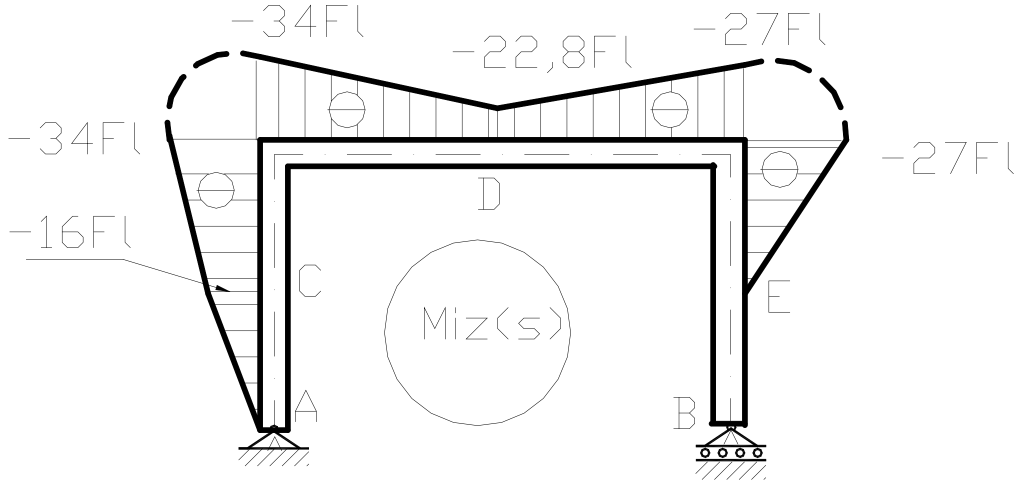


Figura 181

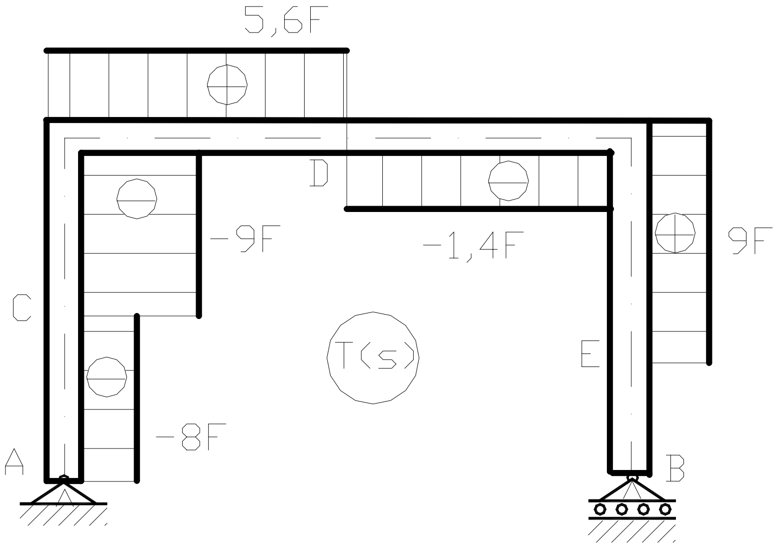


Figura 182

Regiunea a II-a

$$y_2 \in (2l;4l)$$

$$N(y_2) = -\frac{28F}{5}; T(y_2) = -8F - F = -9F; M_{iz}(y_2) = -8F.y_2 - F(y_2 - 2l).$$

$$\lim_{y_2 \downarrow 2l} M_{iz}(y_2) = -16Fl; \lim_{y_2 \uparrow 4l} M_{iz}(y_2) = -8F.4l - F(4l - 2l) =$$
$$= -34Fl.$$

Regiunea a III-a

$$x_3 \in (0;2l); \begin{matrix} N(x_3) = -8F - F = -9F; T(x_3) = 5{,}6F; M_{iz}(x_3) = 5{,}6F.x_3 - 8F.4l - \\ - F.2l; M_{iz}(x_3) = 5{,}6Fx_3 - 34Fl \end{matrix};$$

$$\lim_{x_3 \downarrow 0} M_{iz}(x_3) = -34Fl; \lim_{x_3 \uparrow 2l} M_{iz}(x_3) = 5{,}6F.2l - 34Fl = -22{,}8Fl.$$

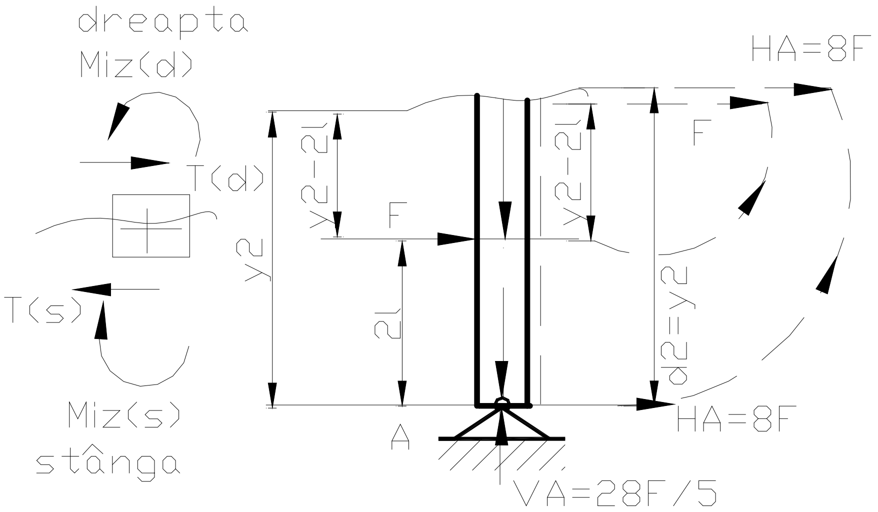


Figura 183

Regiunea a IV-a $x_4 \in (0;3l)$;

$$N(x_4) = -9F; T(x_4) = -1{,}4F; M_{iz}(x_4) = 1{,}4F.x_4 - 9F.3l; M_{iz}(x_4) = \\ = 1{,}4Fx_4 - 27Fl;$$

$$\lim_{x_4 \downarrow 0} M_{iz}(x_4) = -27Fl; \lim_{x_4 \uparrow 2l} M_{iz}(x_4) = 1{,}4F.3l - 27Fl = -22{,}8Fl.$$

Regiunea a V-a

$$y_5 \in (l;4l); N(y_5) = -1{,}4F; T(y_5) = 9F; M_{iz}(y_5) = -9F(y_5 - l);$$

$$\lim_{y_5 \downarrow l} M_{iz}(y_5) = 0; \lim_{y_5 \uparrow 4l} M_{iz}(y_5) = -9F(4l - l) = -27Fl.$$

Regiunea a VI-a

$$y_6 \in (0;l); N(y_6) = -\frac{7}{5}F = -1{,}4F; T(y_6) = 0; M_{iz}(y_6) = 0;$$

În secţiunea în care există forţă axială concentrată trebuie ca în

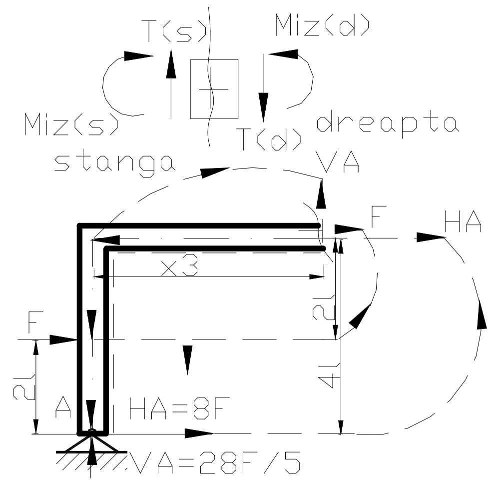


Figura 184

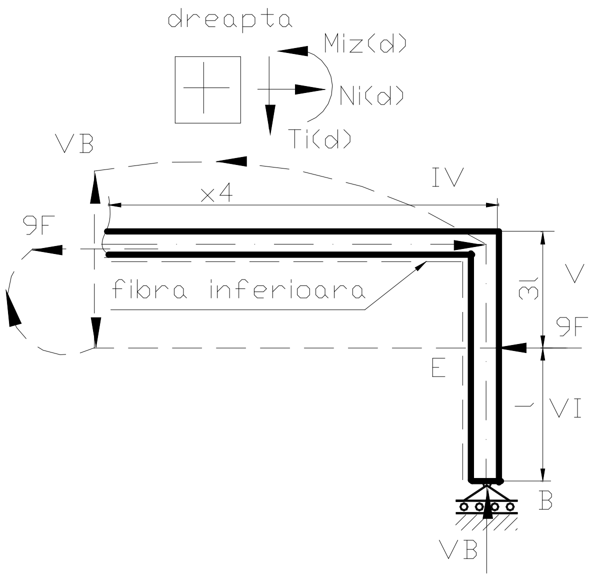


Figura 185

diagrama de forţe axiale să avem un salt în acea secţiune, valoarea absolută a saltului trebuie să fie egală cu valoarea absolută a forţei axiale concentrate .În secţiunea din punctul (A) , avem un salt al

forţei axiale egal cu : $\left|-V_A\right| = \left|-\dfrac{28F}{5}\right| = \dfrac{28F}{5}$ = saltul .

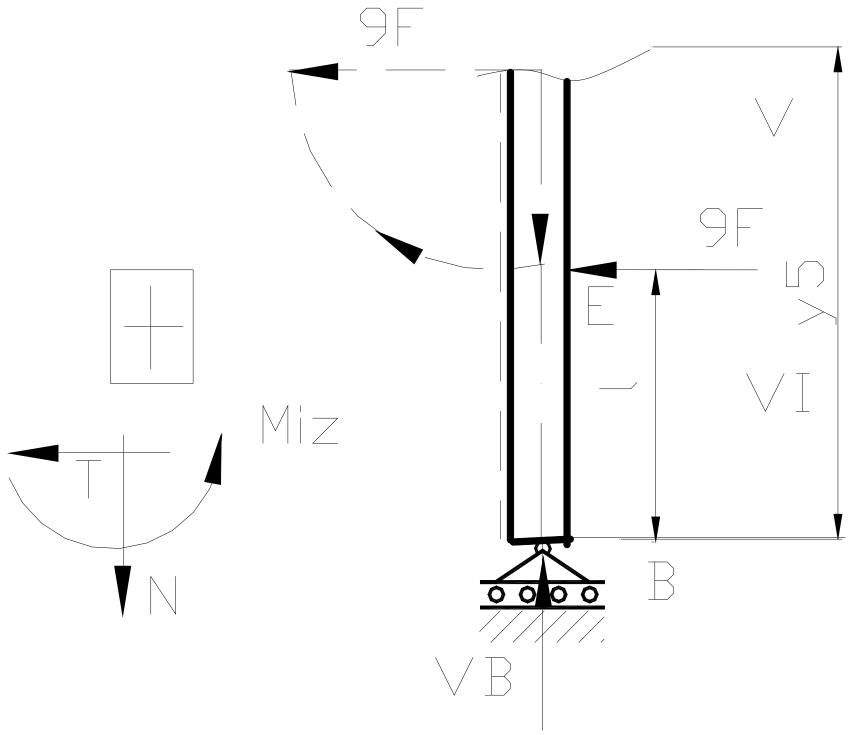


Figura 186

În secţiunea în care există forţă tăietoare concentrată trebuie ca în diagrama de forţe tăietoare să avem un salt în acea secţiune, valoarea absolută a saltului trebuie să fie egală cu valoarea absolută a forţei tăietoare concentrate . În secţiunea din punctul (A) , avem un salt al forţei tăietoare egal cu : $|H_A| = 8F$ **,** saltul fiind dat de forţa tăietoare concentrată H_A.

-în secţiunea din punctul (C) , saltul = $|l_s - l_d| = |-8F - (-9F)| = F;$ în secţiunea din punctul (D) , saltul = $|l_s - l_d| = |5{,}6F - (-1{,}4F)| = 7F;$ în secţiunea din punctul (E) , saltul = $|l_s - l_d| = |0 - (9F)| = 9F;$

De asemenea se vede că momentul M$iz(s)$, se rabate când trece de la o bară la alta (deci în nod) .

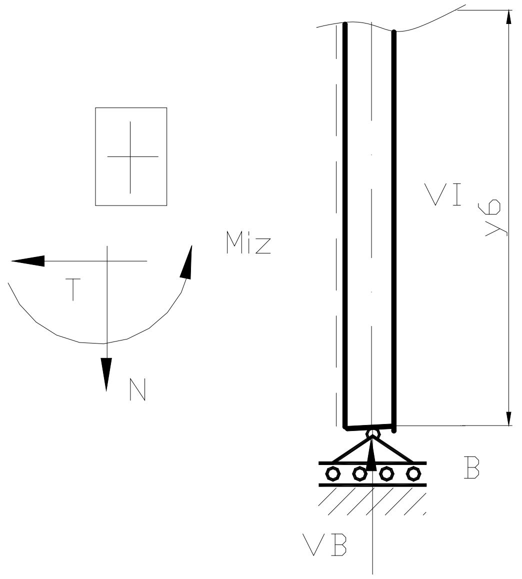


Figura 187

Problema nr.2

Să se traseze diagramele de eforturi pentru grinda cotită din figura 188:

$\sum F_x = 0; 6ql - H_A = 0; H_A = 6ql;\ \sum F_y = 0; V_A - 7ql = 0; V_A = 7ql$;

$\sum M_{iz}(A) = 0; M_{iz}(A) - 6ql * 3l + 7ql * 2,34l + ql^2 = 0;$

$M_{iz}(A) = 0,62ql^2.$

Regiunea întâi:

$y_1 \in (0;6l)$

$N(y_1) = -7ql; T(y_1) = -6ql - qy_1; M_{iz}(y_1) = 0,62ql^2 - 6qly_1 + \frac{qy_1^2}{2}$;

$\lim_{y_1 \downarrow 0} M_{iz}(y_1) = 0,62ql^2; \lim_{y_1 \uparrow 6l} M_{iz}(y_1) = -17,38ql^2$

$$\lim_{y_1 \downarrow 0} T(y_1) = -6ql; \lim_{y_1 \uparrow 6l} T(y_1) = -6ql - 6ql = -12ql;$$

$$\frac{dM_{iz}(y_1)}{dy_1} = T(y_1) = -6ql + qy_1;$$

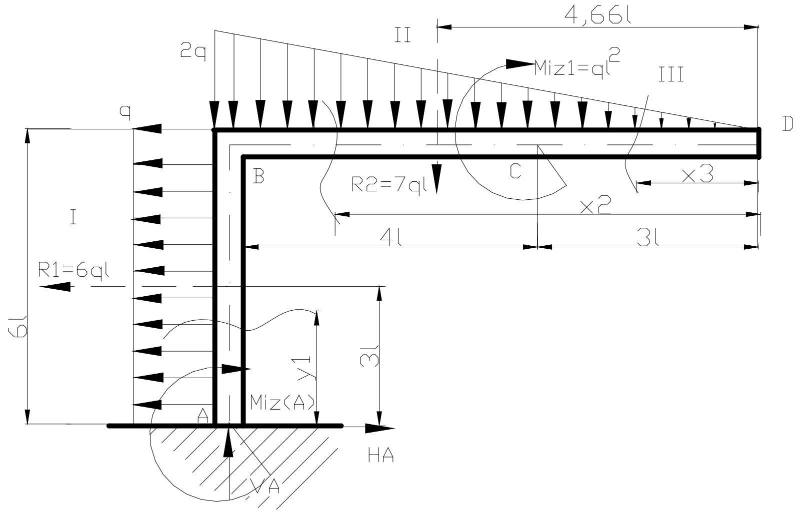


Figura 188

$$\frac{dM_{iz}(y_1)}{dy_1} = -6ql + qy_1 = 0; y_1 = 6l \notin (0;6l);$$

$$\frac{d^2M_{iz}(y_1)}{dy_1^2} = q > 0; \textbf{convexă .}$$

Regiunea a III-a

$$x_3 \in (0;3l);$$

$$\frac{q(x_3)}{2q} = \frac{x_3}{7l}; q(x_3) = \frac{2qx_3}{7l}; R(x_3) = \frac{x_3}{2} * q(x_3) = \frac{qx_3^2}{7l}; T(x_3) = \frac{qx_3^2}{7l};$$

$$\frac{dT(x_3)}{dx_3} = \frac{2qx_3}{7l};$$

$$\frac{d^2T(x_3)}{dx_3^2} = \frac{2q}{7l} > 0 \ ;$$

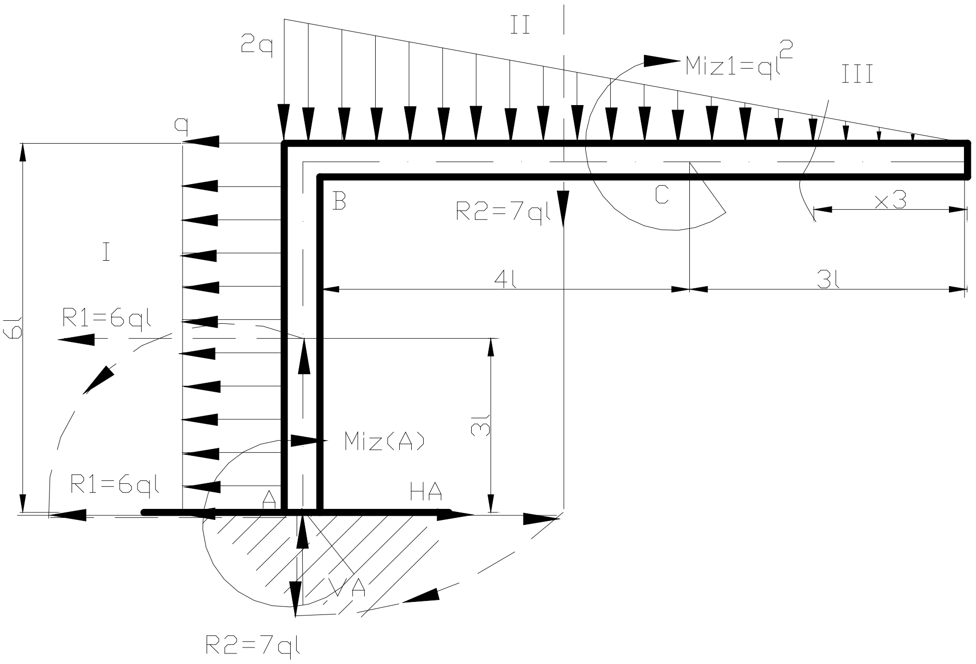


Figura 189

Regiunea întâi

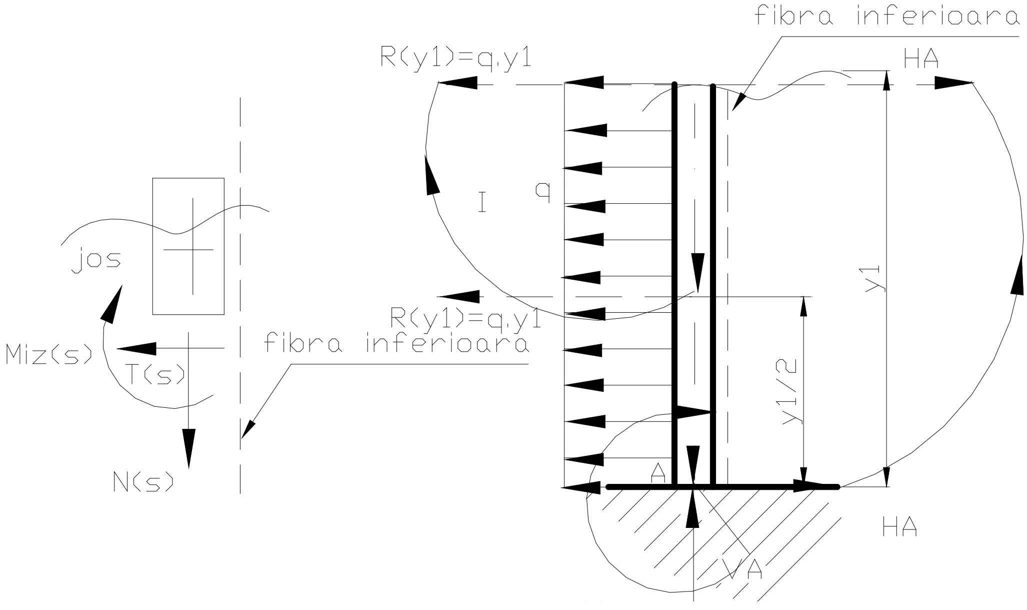


Figura 190

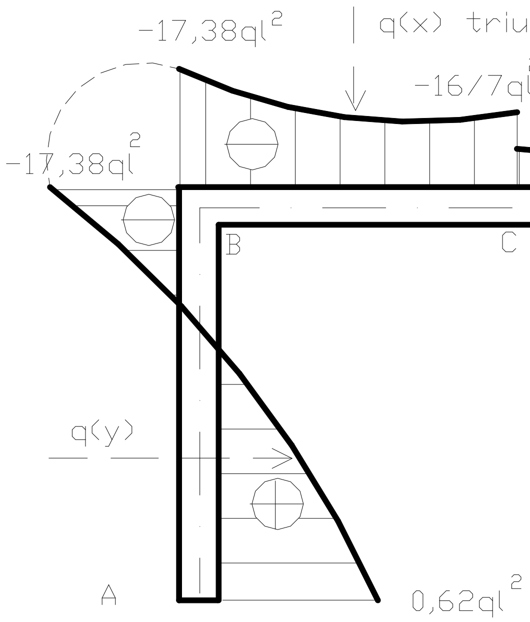


Figura 191

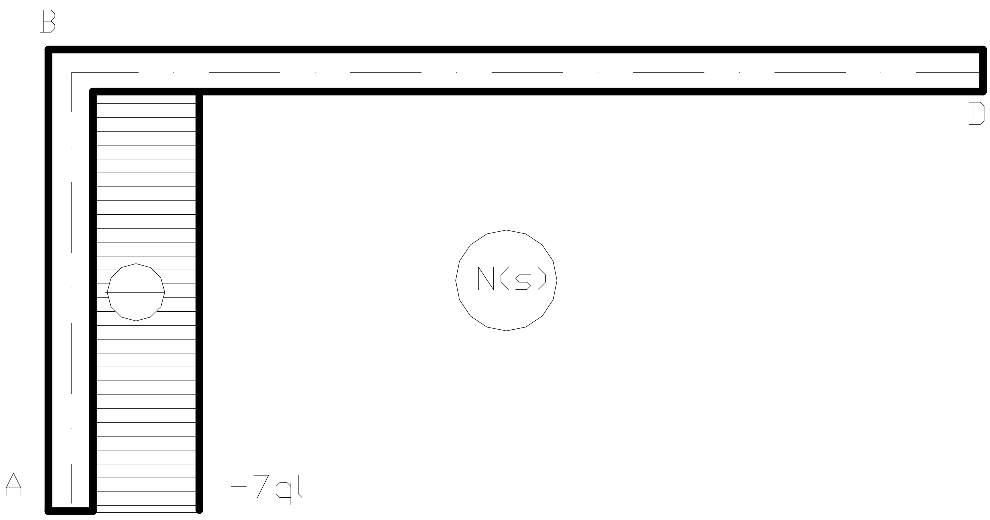


Figura 192

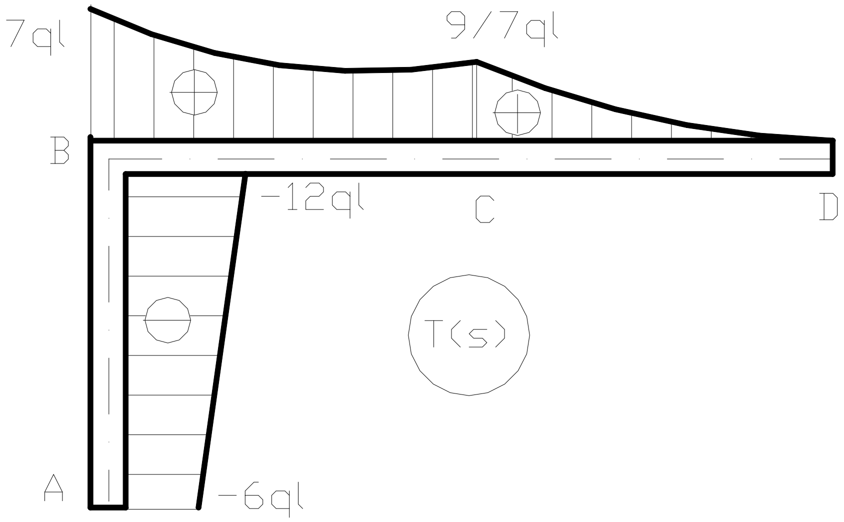


Figura 193

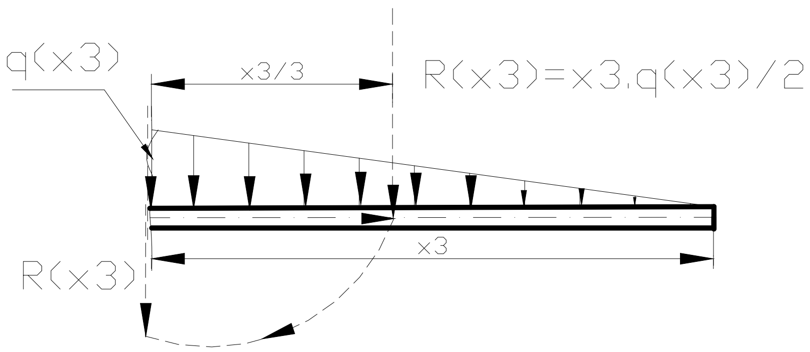


Figura 194

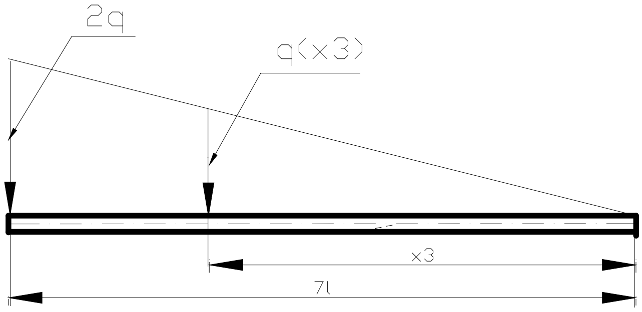


Figura 195

$$\lim_{x_3 \downarrow 0} T(x_3) = 0; \lim_{x_3 \uparrow 3l} T(x_3) = \frac{9ql}{7}; M_{iz}(x_3) = -\frac{qx_3^2}{7l} * \frac{x_3}{3} = -\frac{qx_3^2}{21l}$$

$$\frac{d\ M_{iz}(x_3)}{dx_3}=-\frac{qx_3^2}{7l};\ \frac{d^2M_{iz}(x_3)}{dx_3^2}=-\frac{2qx_3}{7l}<0;$$

$$\lim_{x_3\downarrow 0}M_{iz}(x_3)=0;\lim_{x_3\uparrow 3l}M_{iz}(x_3)=-\frac{9ql^2}{7};$$

<u>Regiunea a II-a</u>

$$x_2\in(3l;7l);\quad T(x_2)=\frac{qx_2^2}{7l};\frac{dT(x_2)}{dx_2}=\frac{2qx_2}{7l};\quad \frac{d^2T(x_2)}{dx_2^2}=\frac{2q}{7l}>0\ ;$$

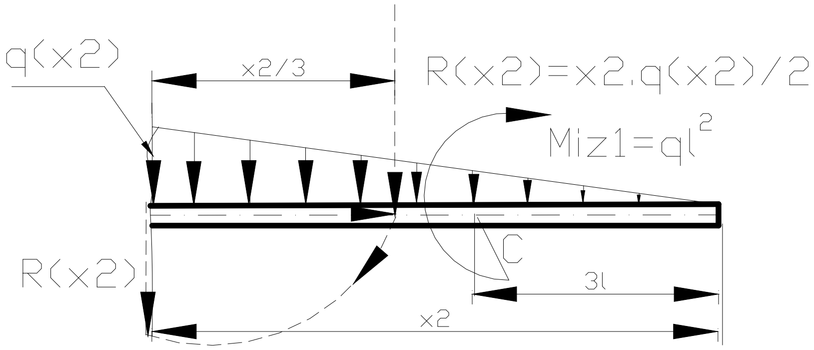


Figura 196

$$\lim_{x_2\downarrow 3l}T(x_2)=\frac{9ql}{7};\lim_{x_2\uparrow 7l}T(x_2)=7ql;M_{iz}(x_2)=-\frac{qx_2^2}{7l}*\frac{x_2}{3}-ql^2=$$

$$=-\frac{qx_2^3}{21l}-ql^2;$$

$$\frac{d\ M_{iz}(x_2)}{dx_2}=-\frac{qx_2^2}{7l};\ \frac{d^2M_{iz}(x_2)}{dx_2^2}=-\frac{2qx_2}{7l}<0;$$

$$\lim_{x_2\downarrow 3l}M_{iz}(x_2)=-\frac{16ql^2}{7};\lim_{x_3\uparrow 7l}M_{iz}(x_2)=-17{,}33ql^2;$$

În secţiunea în care există moment încovoietor concentrat trebuie ca în diagrama de momente încovoietore să avem un salt în acea secţiune, valoarea absolută a saltului trebuie să fie egală cu valoarea absolută a momentului încovoietor concentrat . În secţiunea din punctul (C) , avem un salt al momentului încovoietor egal cu :

$$\left| -\frac{9}{7}ql^2 - \left(-\frac{16}{7}ql^2\right)\right| = ql^2 .$$

Problema nr.3

Să se traseze diagramele de eforturi : $\vec{N},\vec{T},\vec{M}_{iz}$ pentru bara cotită din figura 197:

Aflăm forţele de reacţiune : V_A, H_A , V_B din condiţiile de echilibru.

$\sum F_x = 0; H_A = 0$; $\sum F_y = 0; V_A - ql - ql + V_B = 0; V_A + V_B = 2ql$

fiind ecuaţia de verificare , se află forţele de reacţiune V_A şi V_B din $\sum M_{iz}(oarecare) = 0;$

$$\sum M_{iz}(A) = 0; ql * \frac{l}{2} + ql * 2l - V_B * 3l = 0; V_B = \frac{5ql}{6};$$

$$\sum M_{iz}(B) = 0; -ql\left(3l - \frac{l}{2}\right) - ql * l + V_A * 3l = 0; V_A = \frac{7ql}{6};$$

$\frac{5ql}{6} + \frac{7ql}{6} = 2ql; 2ql = 2ql$, ecuaţia de verificare este îndeplinită , s-au calculat corect forţele de reacţiune, apoi se trece la fiecare regiune în parte.

Regiunea întâi figura 201; $\begin{cases} x_1 \in (0;l) \\ y_1 \in (0;l) \end{cases}$;R(x_1) = q .x_1 ;

$$N(x_1) = R(x_1)\cos 45^o - V_A \cos 45^o;$$

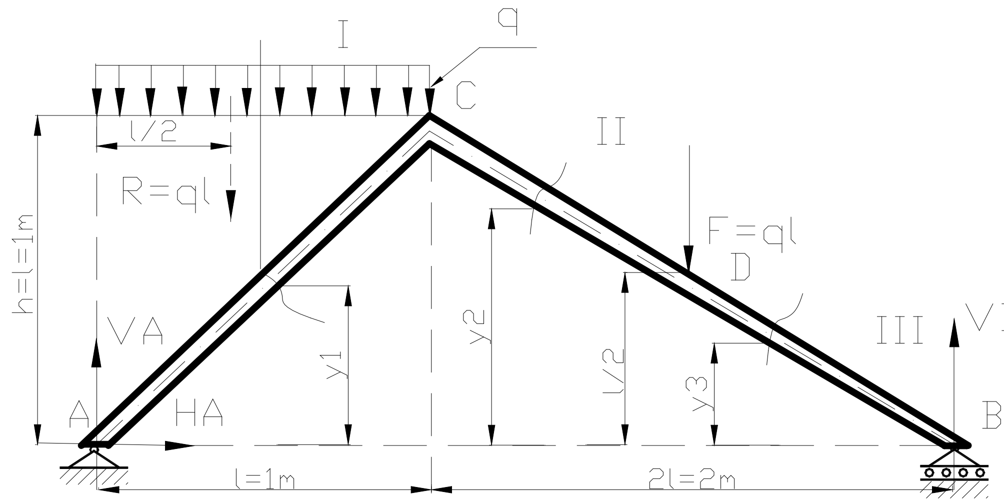


Figura 197

$$N(x_1)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(qx_1-\frac{7ql}{6}\right);\lim_{x_1\downarrow 0}N(x_1)=-\frac{7\sqrt{2}}{12}ql\;;$$

$$\lim_{x_1\uparrow l}N(x_1)=-\frac{\sqrt{2}}{12}ql\;;$$

$$T(x_1)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-qx_1+\frac{7ql}{6}\right);\lim_{x_1\downarrow 0}T(x_1)=\frac{7\sqrt{2}}{12}ql;\;\lim_{x_1\uparrow l}T(x_1)=\frac{\sqrt{2}}{12}ql\;;$$

$$M_{iz}(x_1)=\frac{7qlx_1}{6}-\frac{qx_1^2}{2};\frac{dM_{iz}(x_1)}{dx_1}=\frac{7ql}{6}-qx_1\;;\;\frac{d^2M_{iz}(x_1)}{dx_1^2}=-q<0;$$

concavă.

$$\lim_{x_1\downarrow 0}M_{iz}(x_1)=\lim_{x_1\downarrow 0}\left(\frac{7qlx_1}{6}-\frac{qx_1^2}{2}\right)=0;$$

$$\lim_{x_1\uparrow l}M_{iz}(x_1)=\lim_{x_1\uparrow l}\left(\frac{7qlx_1}{6}-\frac{qx_1^2}{2}\right)=\frac{4ql^2}{6}=\frac{2ql^2}{3}$$ **; Regiunea a III-a**

figura 205 $\left\{\dfrac{x_3 \in (0;l)}{y_3 \in \left(0;\dfrac{l}{2}\right)}\right.$;

$N(x_3) = \left(-\dfrac{5ql}{6}\right)\sin\beta; \sin\beta = 0{,}447; \cos\beta = 0{,}894$; $T(x_3) = -0{,}745ql$

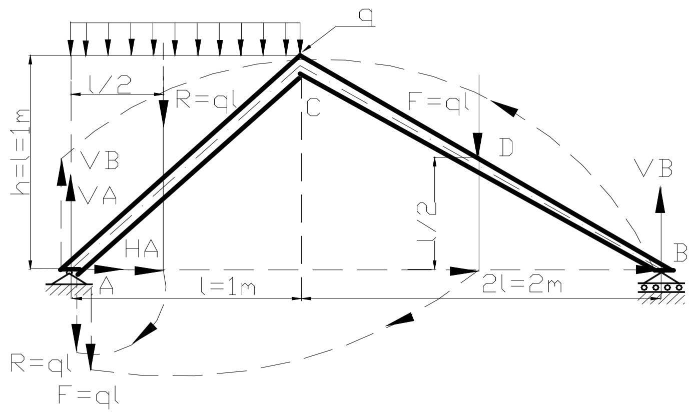


Figura 198

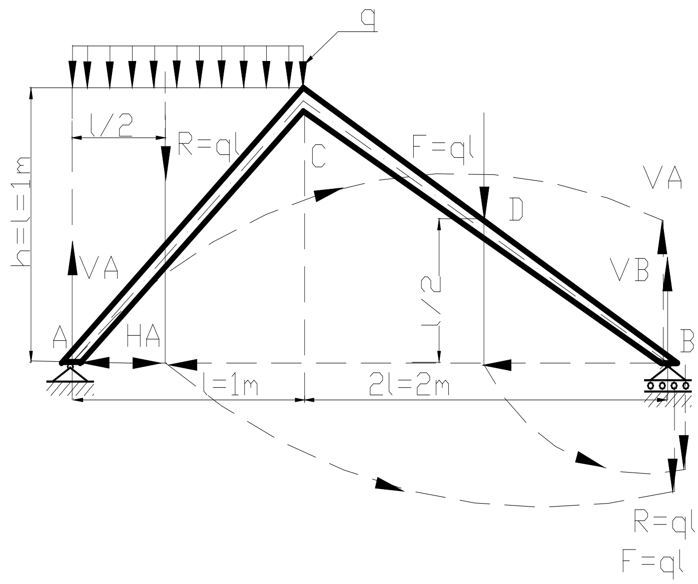


Figura 199

$M_{iz}(x_3)=\frac{5qlx_3}{6}$ **;β=26,565º ;** $T(x_3)=-V_B\cos\beta$ **;**

$$\lim_{x_3\downarrow 0} M_{iz}(x_3)=\lim_{x_3\downarrow 0}\frac{5qlx_3}{6}=0;$$

$$\lim_{x_3\uparrow l} M_{iz}(x_3)=\lim_{x_3\uparrow l}\frac{5qlx_3}{6}=\frac{5ql^2}{6};$$

Regiunea a II-a figura 206

$N(x_2)=\left(ql-\frac{5ql}{6}\right)\sin\beta$ **;** $N(x_2)=0{,}0745ql$ **;**

$T(x_2)=\left(ql-\frac{5ql}{6}\right)\cos\beta$ **;** $T(x_2)=0{,}149ql$ **;**

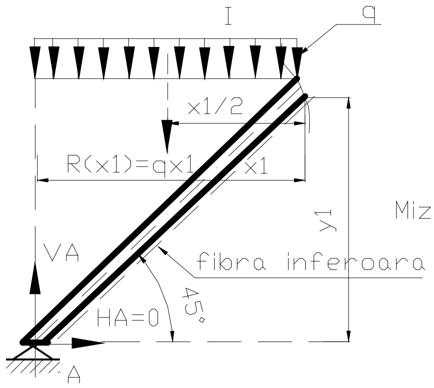


Figura 200

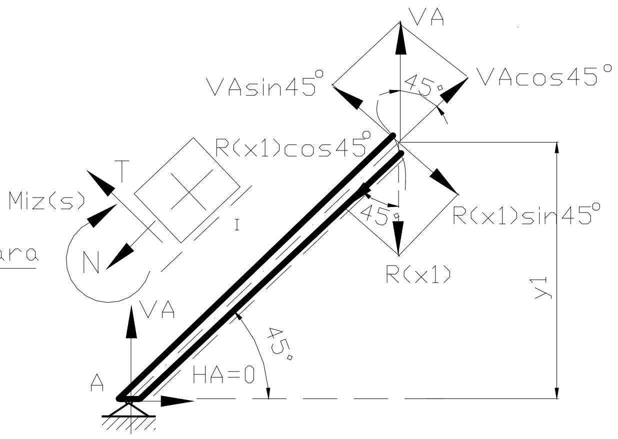


Figura 201

$$\begin{cases}\dfrac{x_2\in(l;2l)}{y_2\in\left(\dfrac{l}{2};l\right)}\end{cases};\quad M_{iz}(x_2)=\frac{5qlx_2}{6}-ql(x_2-l)$$

$$\lim_{x_2\downarrow l} M_{iz}(x_2)=\lim_{x_2\downarrow l}\left[\ \frac{5qlx_2}{6}-ql(x_2-l)\ \right]=\frac{5ql^2}{6};$$

$\lim\limits_{x_2 \uparrow 2l} M_{iz}(x_2) = \lim\limits_{x_2 \uparrow 2l}\left[\ \frac{5qlx_2}{6} - ql(x_2 - l)\ \right] = \frac{2ql^2}{3}$.În punctul D forţa tăietoare concentrată $T_D = ql \cos\beta$; $T_D = 0,894\ ql$; saltul în această secţiune fiind egal cu :

$\left|0,149ql + 0,745ql\ \right| = 0,894ql$.

În punctul D forţa axială concentrată $N_D = ql \sin\beta$; $N_D = 0,447\ ql$; saltul în această secţiune fiind egal cu

$\left|0,372ql + 0,0745ql\ \right| = 0,447ql$.

La fel se verifică şi în secţiunile din punctele A şi B , în secţiunea din punctul (A) saltul pentru forţa axială este egal cu :

$\left|\frac{-7ql\sqrt{2}}{12}\ \right| = \frac{7ql\sqrt{2}}{12} = \left|V_A \cos 45^o\ \right|$; tot în secţiunea din (A) există salt pentru forţa tăietoare egal cu $\left|\ -0,372ql\ \right| = 0,372ql = \left|V_B \sin\beta\right|$; tot în secţiunea din (B) există salt pentru forţa tăietoare egal cu $\left|-0,745ql\right| = 0,745ql = \left|V_B \cos\beta\right|$.

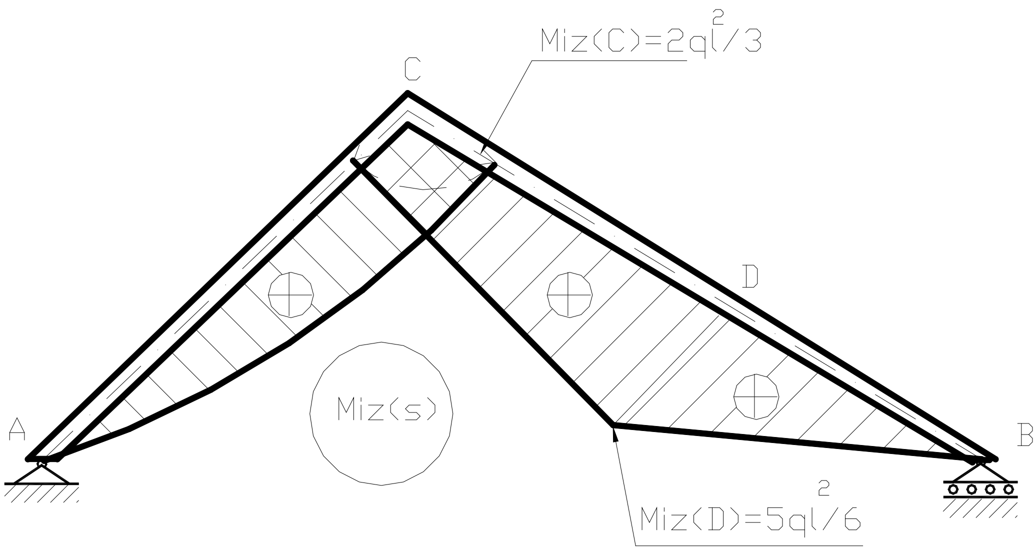


Figura 202

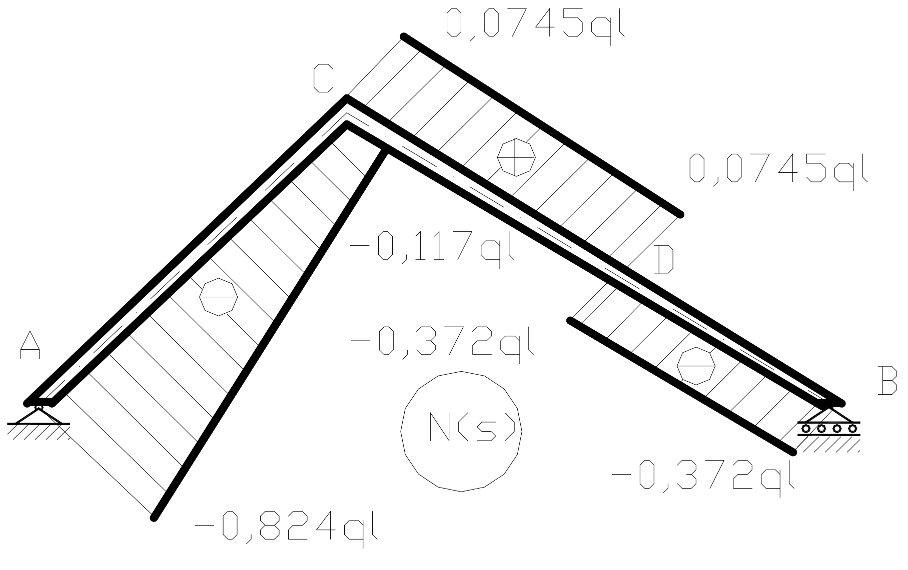


Figura 203

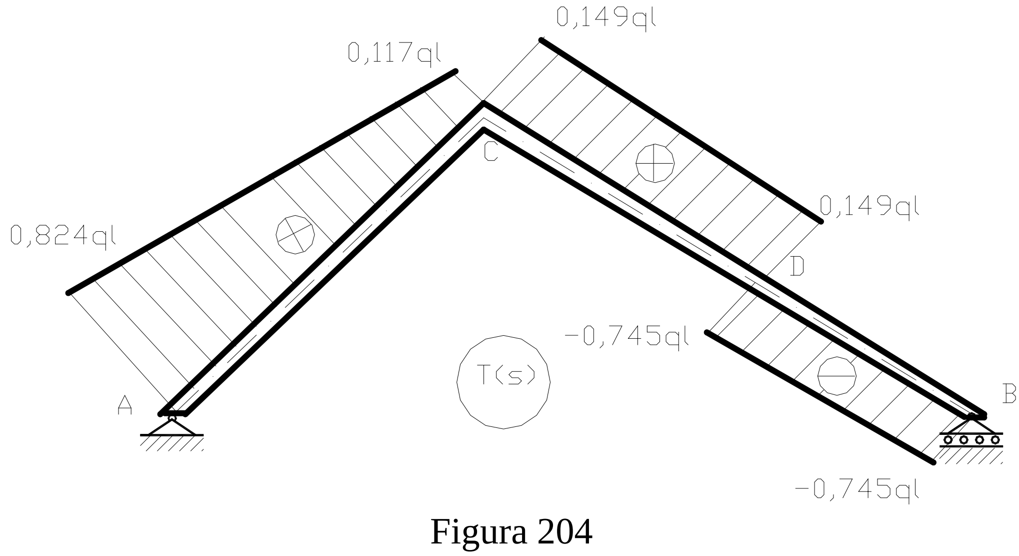


Figura 204

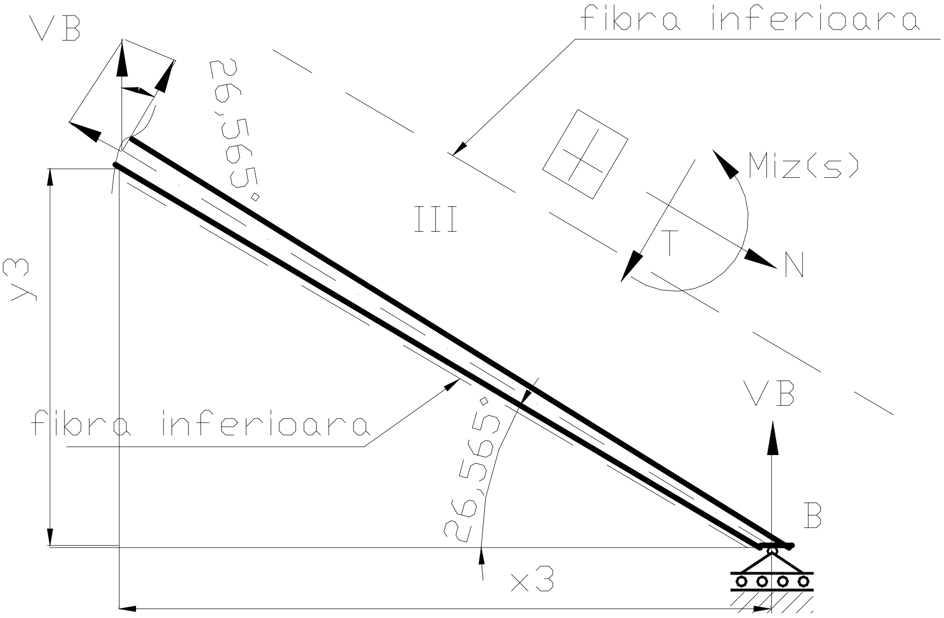


Figura 205

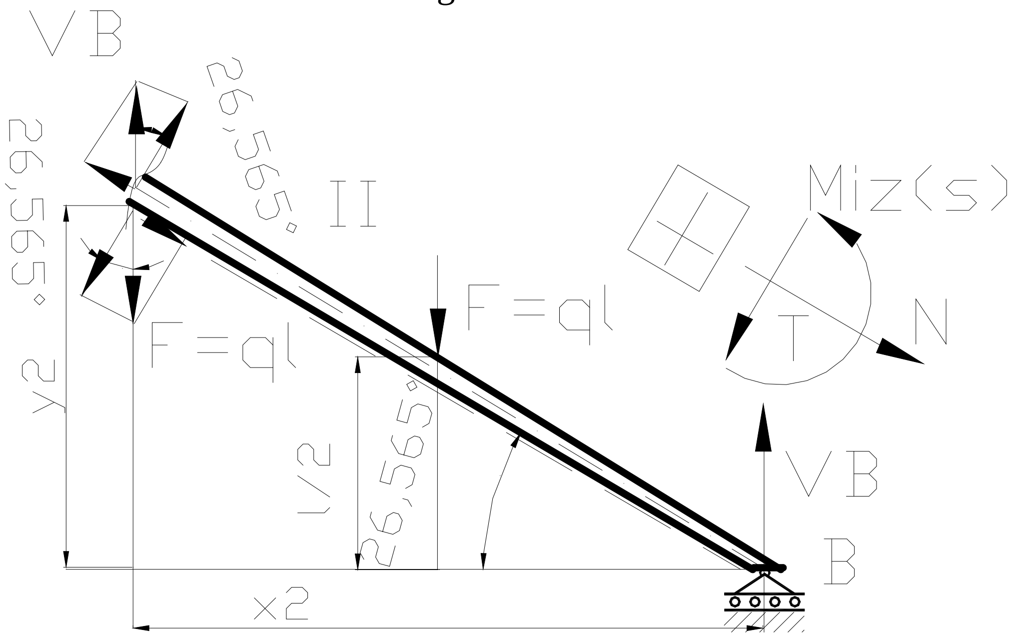


Figura 206

Problema nr. 4

Să se traseze diagramele de eforturi pentru grinda cotită din figura 207.

Rezolvare:

Rezultantele forţelor distribuite sunt: $R_1 = \frac{2ql}{2} = ql$; $R_2 = q*4l = 4ql$;

$R_3 = \int_0^l q(y)dy = \int_0^l 2q\sin\frac{\pi.y}{l}dy = 2q\int_0^l \sin\frac{\pi.y}{l}dy$; se face schimbarea de

variabilă , $\frac{\pi.y}{l} = u; d\left(\frac{\pi.y}{l}\right) = du; \left(\frac{\pi.y}{l}\right)' dy = du; \frac{\pi}{l}dy = du; dy = \frac{l}{\pi}du$

noua variabilă fiind (u)

$R_3 = 2q\int_0^l \sin\frac{\pi.y}{l}dy = 2q\int_0^\pi \frac{l}{\pi}\sin u du = \frac{2ql}{\pi}\int_0^\pi \sin u du = -\frac{2ql}{\pi}(\cos u)\Big|_0^\pi = \frac{4ql}{\pi};$

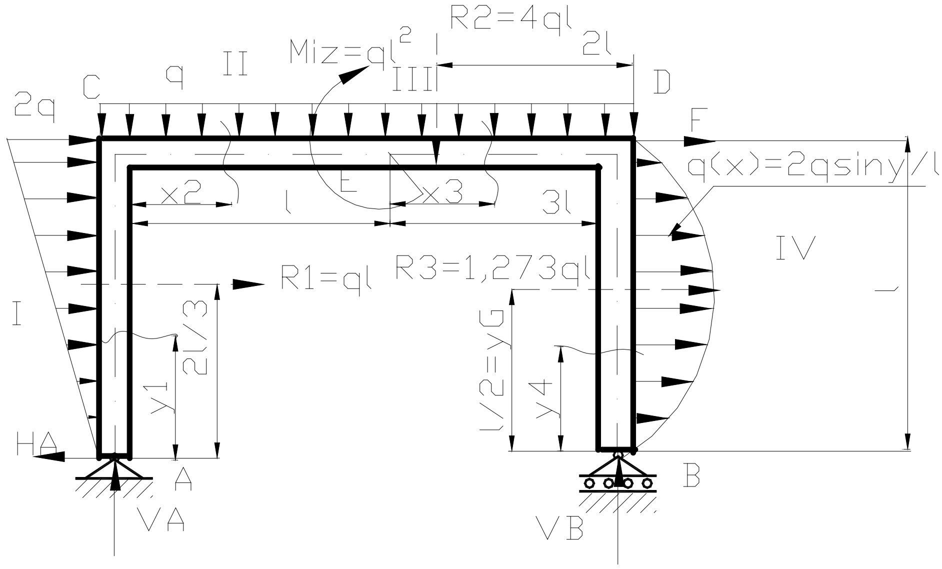


Figura 207

Se află punctul de aplicaţie al forţei rezultante (R_3) cu

formula: $y_{G3} = \dfrac{\int_0^l y.q(y)dy}{\int_0^l q(y)dy}$; se rezolvă separat

integralele. $\int_0^l yq(y)dy = 2q\int_0^l y\sin\dfrac{\pi.y}{l}dy$, se rezolvă cu integrarea prin

părţi:

$\int f.g^{'}dy = fg - \int f^{'}g.dy; sau; \int fdg = f.g - \int g.df$; în acest caz

f(y) = y ; f'(y) = 1 ;

iar $\sin\dfrac{\pi.y}{l}dy = g^{'}(y)dy; \int\sin\dfrac{\pi.y}{l}dy = \int g^{'}(y)dy; g(y) = -\dfrac{l}{\pi}\cos\dfrac{\pi.y}{l}$;

$$\int_0^l y\sin\frac{\pi.y}{l}dy = -\frac{l.y}{\pi}\left(\cos\frac{\pi.y}{l}\right)\Big|_0^l - \int_0^l -\frac{l}{\pi}\cos\frac{\pi.y}{l}dy = \frac{l^2}{\pi};$$

$$\int_0^l y.q(y)dy = 2q\int_0^l y.\sin\frac{\pi.y}{l}dy = 2q.\frac{l^2}{\pi};$$

$y_{G3} = \dfrac{\int_0^l y.q(y)dy}{\int_0^l q(y)dy} = \dfrac{\frac{2ql^2}{\pi}}{\frac{4ql}{\pi}} = \dfrac{l}{2}$; se poate pune direct . Aflăm forţele **de** reacţiune din condiţiile de echilibru:

$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{iz}(s) = 0 \end{cases}$; din $\sum F_x = 0; H_A - ql - ql - \dfrac{4ql}{\pi} = 0; H_A = 3{,}273ql$;

$\sum F_y = 0; V_A - 4ql + V_B = 0; V_A + V_B = 4ql$; fiind ecuaţia de verificare , se află forţele de reacţiune V_A şi V_B din

$$\sum M_{iz}(oarecare) = 0.$$

$$\sum M_{iz}(A) = 0; ql * \frac{2l}{3} + ql^2 + 4ql * 2l + ql * l + \frac{4ql}{\pi} * \frac{l}{2} - V_B * 4l = 0;$$

$V_B = 2{,}824ql$

$$\sum M_{iz}(B) = 0; ql * \frac{2l}{3} + ql^2 - 4ql * 2l + ql * l + \frac{4ql}{\pi} * \frac{l}{2} + V_A * 4l = 0;$$

$V_A = 1{,}173ql$

$V_A + V_B = 4ql$; 1,173ql + 2,824 ql =3,997 ql $\cong 4ql$;

este îndeplinită ecuaţia de verificare, deoarece au rezultat valori pozitive pentru forţele de reacţiune , rezultă că rămân cu sensurile iniţiale .

<u>Regiunea întâi</u>

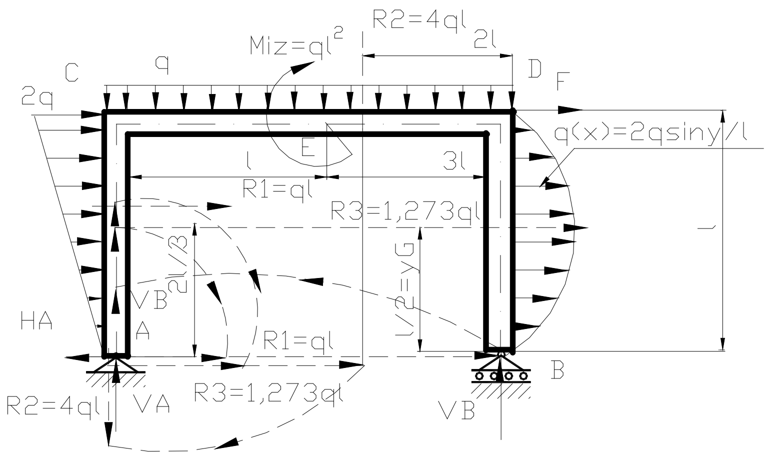


Figura 208

$y_1 \in (0; l)$; folosim relaţiile diferenţiale dintre sarcini şi eforturi

: $\frac{dN(y_1)}{dy_1} = q_N(y_1)$; unde $q_N(y_1)$ este forţa axială distribuită pe această regiune , în cazul acesta particular nu avem forţă axială distribuită , deci $q_N(y_1) = 0$ [kN/m]

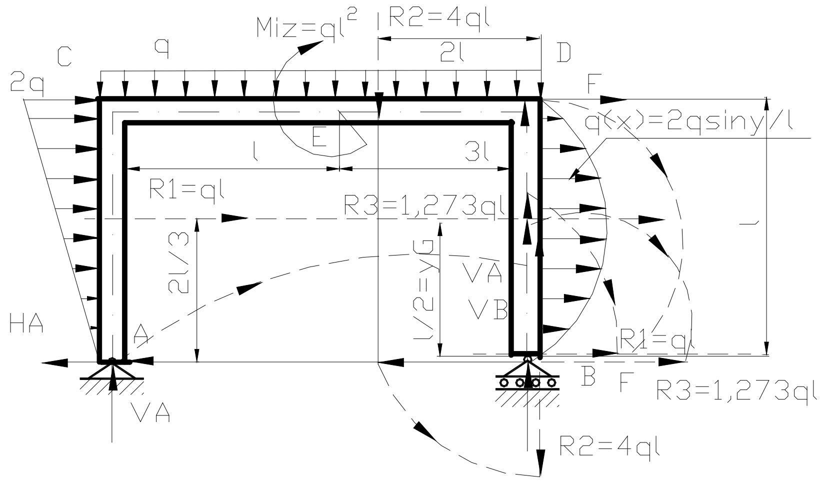


Figura 209

şi vom avea , $\frac{dN(y_1)}{dy_1}=0$,

$dN(y_1)=0.dy_1; \int dN(y_1)=\int 0.dy_1; N(y_1)=C_1$. Se află constanta de integrare C_1 din condiţiile iniţiale ale lui Cauchy şi anume ,

$\lim\limits_{y_1 \downarrow 0} N(y_1)=-V_A=-1{,}173ql=C_1$; deci N(y_1) = -1,173 ql . Acum determinăm forţa tăietoare : $\frac{dT(y_1)}{dy_1}=-q_T(y_1)$; unde $q_T(y_1)$ este forţa tăietoare distribuită pe

această regiune şi are expresia următoare, $q_T(y_1) = a.y_1 + b$

cu $\lim\limits_{y_1 \downarrow 0} q_T(y_1)=0=a.0+b; b=0$; $\lim\limits_{y_1 \uparrow l} q_T(y_1)=2q=a.l+b$;

cum (b = 0)

implică $a=\frac{2q}{l}$; $q_T(y_1)=\frac{2qy_1}{l}$; $\frac{dT(y_1)}{dy_1}=-q_T(y_1)=-\frac{2qy_1}{l}$;

$dT(y_1)=-\frac{2qy_1}{l}dy_1$; se integrează

$\int dT(y_1)=\int -\frac{2qy_1}{l}dy_1; T(y_1)=-\frac{qy_1^2}{l}+C_2$;

$$\lim_{y_1 \downarrow 0} T(y_1) = \lim_{y_1 \downarrow 0} \left(-\frac{q y_1^2}{l} + C_2 \right) = H_A = 3{,}273ql; C_2 = 3{,}273ql\,\mathbf{;}$$

$$T(y_1) = -\frac{q y_1^2}{l} + 3{,}273ql \;\; ; \;\; T^{'}(y_1) = -\frac{2qy_1}{l};$$

$$T^{''}(y_1) = -\frac{2q}{l} < 0; \textbf{concavă} \;\; ;$$

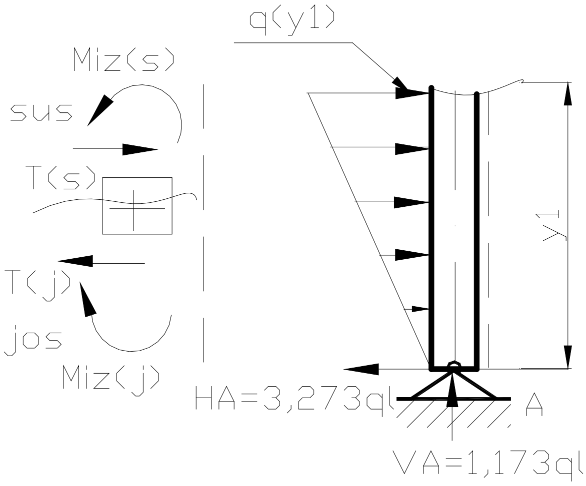


Figura 210

$$\lim_{y_1 \downarrow 0} T(y_1) = \lim_{y_1 \downarrow 0} \left(-\frac{q y_1^2}{l} + 3{,}273ql \right) = 3{,}273ql;$$

$$\lim_{y_1 \uparrow l} T(y_1) = \lim_{y_1 \uparrow l} \left(-\frac{q y_1^2}{l} + 3{,}273ql \right) = 2{,}273ql;$$

$$\frac{dM_{iz}(y_1)}{dy_1} = T(y_1); dM_{iz}(y_1) = T(y_1)dy_1; \int dM_{iz}(y_1) = \int T(y_1)dy_1;$$

$$M_{iz}(y_1) = \int \left(\frac{-q y_1^2}{l} + 3{,}273ql \right) dy_1; M_{iz}(y_1) = -\frac{q y_1^3}{3l} + 3{,}273qly_1 + D_1\,\mathbf{;}$$

$$\lim_{y_1 \downarrow 0} M_{iz}(y_1) = \lim_{y_1 \downarrow 0} \left(-\frac{qy_1^3}{3l} + 3{,}273qly_1 + D_1\right) = 0; D_1 = 0;$$

$$M_{iz}(y_1) = -\frac{qy_1^3}{3l} + 3{,}273qly_1 \ ; \quad M'_{iz}(y_1) = -\frac{qy_1^2}{l} + 3{,}273ql;$$

$M''_{iz}(y_1) = -\frac{2qy_1}{l} < 0$; concavă ;

$$\lim_{y_1 \uparrow l} M_{iz}(y_1) = \lim_{y_1 \uparrow l} \left(-\frac{qy_1^3}{3l} + 3{,}273qly_1\right) = 2{,}94ql^2 .$$

<u>Regiunea a II-a</u>

$x_2 \in (0;l)$; folosim relaţiile diferenţiale dintre sarcini şi eforturi : $\frac{dN(x_2)}{dx_2} = q_N(x_2)$; unde $q_N(x_2)$ este forţa axială distribuită pe această regiune , în cazul acesta particular nu avem forţă axială distribuită , deci $q_N(x_2) = 0$ (kN) ; şi vom avea , $\frac{dN(x_2)}{dx_2} = 0$,

$dN(x_2) = 0.dx_2; \int dN(x_2) = \int 0.dx_2; N(x_2) = C_3$. Se află constanta de integrare C_3 din condiţiile iniţiale ale lui Cauchy şi anume ,

$\lim_{x_2 \downarrow 0} N(x_2) = 3{,}273ql - ql = 2{,}173ql = C_3$; deci $N(x_2) = 2{,}173\ ql$.

Acum determinăm forţa tăietoare : $\frac{dT(x_2)}{dx_2} = -q_T(x_2)$; unde $q_T(x_2)$ este forţa tăietoare distribuită pe această regiune şi are expresia următoare, $q_T(x_2) = q$ = constant $\frac{dT(x_2)}{dx_2} = -q_T(x_2) = -q$;

$dT(x_2) = -qdx_2;$

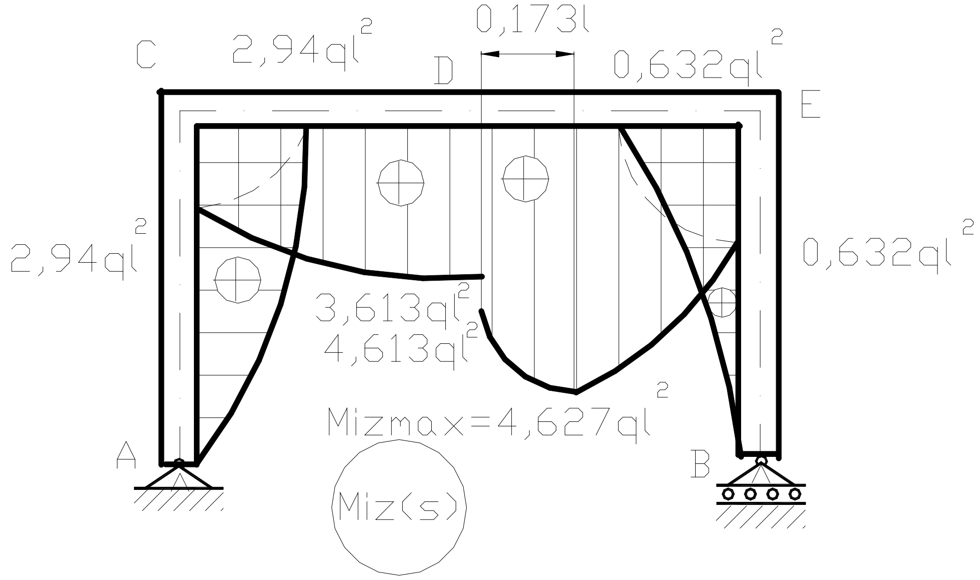
se integrează

$\int dT(x_2) = \int -q dx_2; T(x_2) = -qx_2 + C_4;$

$\lim\limits_{x_2 \downarrow 0} T(x_2) = \lim\limits_{x_2 \downarrow 0} (-qx_2 + C_4) = 1{,}173ql; C_4 = 1{,}173ql;$

$T(x_2) = -qx_2 + 1{,}173ql;$

$\lim\limits_{x_2 \uparrow l} T(x_2) = \lim\limits_{x_2 \uparrow l} (-qx_2 + 1{,}173ql) = 0{,}173ql;$



$$\frac{dM_{iz}(x_2)}{dx_2} = T(x_2); dM_{iz}(x_2) = T(x_2)dx_2; \int dM_{iz}(x_2) = \int T(x_2)dx_2;$$

$$M_{iz}(x_2) = \int(-qx_2 + 1{,}173ql)dx_2; M_{iz}(x_2) = -\frac{qx_2^2}{2} + 1{,}173qlx_2 + D_2;$$

$$\lim_{x_2 \downarrow 0} M_{iz}(x_2) = \lim_{x_2 \downarrow 0}\left(-\frac{qx_2^2}{2} + 1{,}173qlx_2 + D_2\right) = 2{,}94ql^2;$$

$D_2 = 2{,}94ql^2;$

$M_{iz}(x_2) = -\frac{qx_2^2}{2} + 1{,}173qlx_2 + 2{,}94ql^2;$

$M'_{iz}(x_2) = -qx_2 + 1{,}173ql = T(x_2); M''_{iz}(x_2) = -q < 0$ **; concavă ;**

$\lim_{x_2 \uparrow l} M_{iz}(x_2) = \lim_{x_2 \uparrow l}\left(-\frac{qx_2^2}{2} + 1{,}173qlx_2 + 2{,}94ql^2\right) = 3{,}613ql^2$ **.**

Regiunea a III-a **,**

$x_3 \in (0;3l]$; folosim relaţiile diferenţiale dintre sarcini şi eforturi :

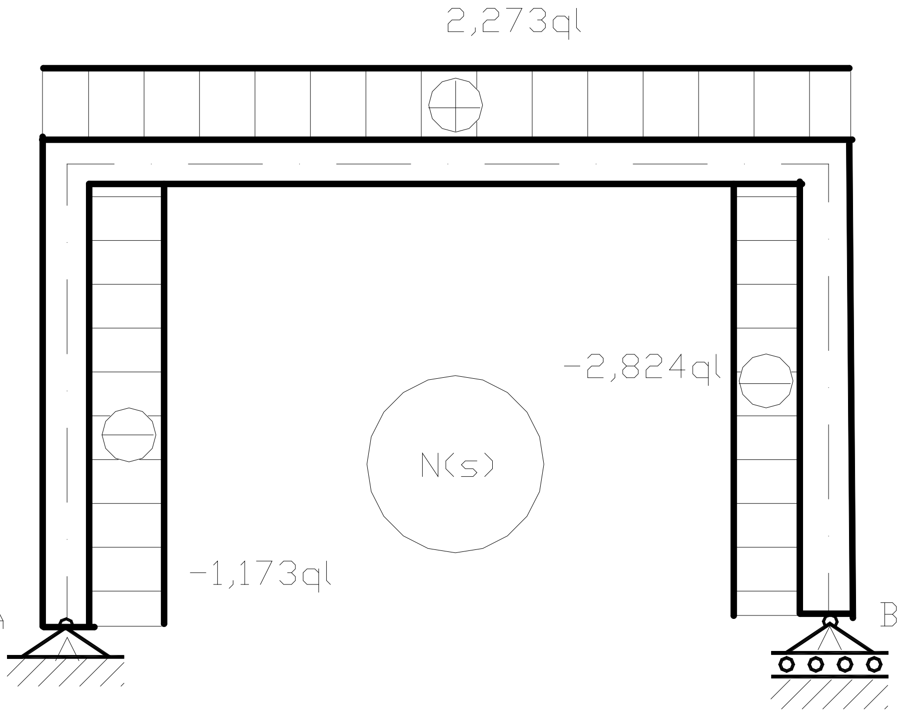


Figura 211

$\frac{dN(x_3)}{dx_3} = q_N(x_3)$; unde $q_N(x_3)$ este forţa axială distribuită pe această regiune , în cazul acesta particular nu avem forţă axială distribuită , deci $q_N(x_3) = 0$ (kN/m) ; şi vom avea , $\frac{dN(x_3)}{dx_3} = 0$ **,**

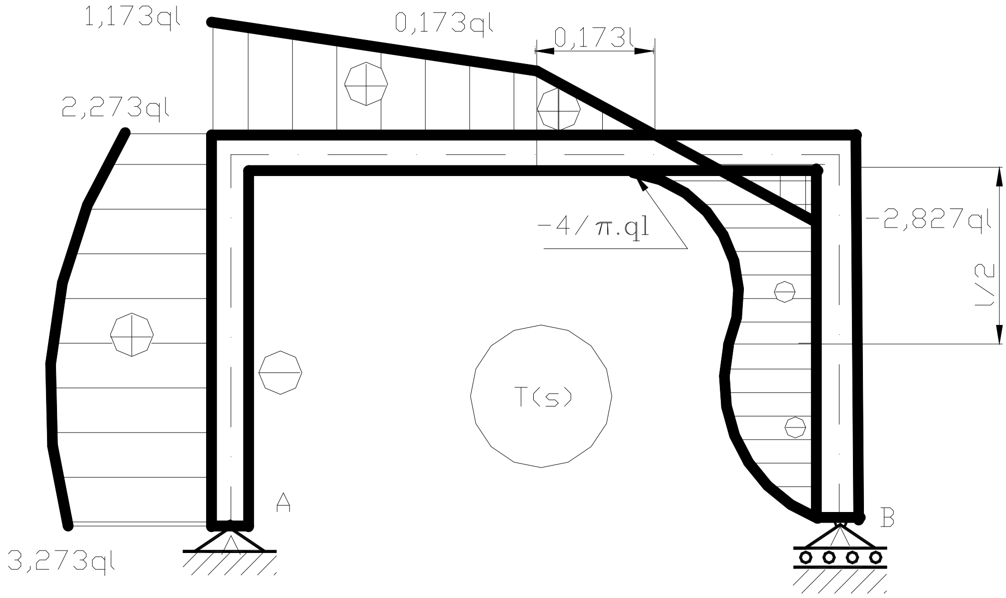


Figura 212

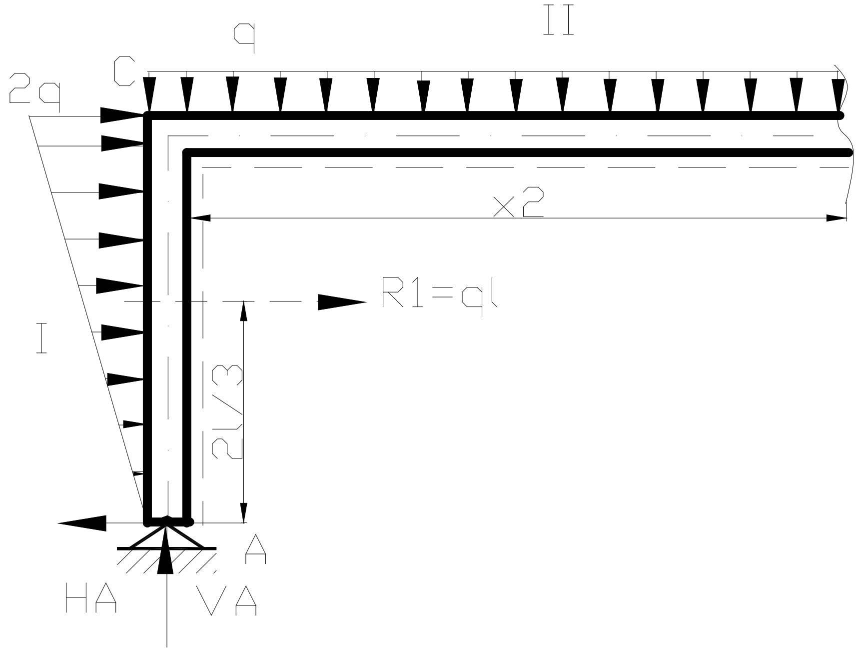


Figura 213

$dN(x_3)=0.dx_3;\int dN(x_3)=\int 0.dx_3;N(x_3)=C_5$. Se află constanta de integrare C_5 din condiţiile iniţiale ale lui Cauchy şi anume ,

$\dfrac{\lim}{x_3\downarrow 0}N(x_3)=2{,}273ql=C_5$; deci N(x_3) = 2,273 ql . Acum

determinăm forţa tăietoare : $\dfrac{dT(x_3)}{dx_3}=-q_T(x_3);$ unde $q_T(x_3)$ este

forţa tăietoare distribuită pe această regiune şi are expresia următoare, $q_T(x_3)=q$ = constant

$\dfrac{dT(x_3)}{dx_3}=-q_T(x_3)=-q$; $dT(x_3)=-qdx_3;$

se integrează $\int dT(x_3)=\int -qdx_3;T(x_3)=-qx_3+C_6;$

$\dfrac{\lim}{x_3\downarrow 0}T(x_3)=\dfrac{\lim}{x_3\downarrow 0}(\ -qx_3+C_6\ )=0{,}173ql;C_6=0{,}173ql;$

$T(x_3)=-qx_3+0{,}173ql$;

$\dfrac{\lim}{x_3\uparrow 3l}T(x_3)=\dfrac{\lim}{x_3\uparrow 3l}(-qx_3+0{,}173ql\ )=-2{,}827ql;;$

$\dfrac{\lim}{x_3\downarrow 0}M_{iz}(x_3)=\dfrac{\lim}{x_3\downarrow 0}(-\dfrac{qx_3^2}{2}+0{,}173qlx_3+D_3\ )=4{,}613ql^2;$

$D_2=4{,}613ql^2;$

$M_{iz}(x_3)=-\dfrac{qx_3^2}{2}+0{,}173qlx_3+4{,}613ql^2;$

$M'_{iz}(x_3)=-qx_3+0{,}173ql=T(x_3);$

$M''_{iz}(x_3)=-q<0$; concavă ;

$M'_{iz}(x_3)=-qx_3+0{,}173ql=0;x_0=0{,}173l$

$M_{iz\max}=M_{iz}(0{,}173l)=4{,}627ql^2$

Regiunea a III-a

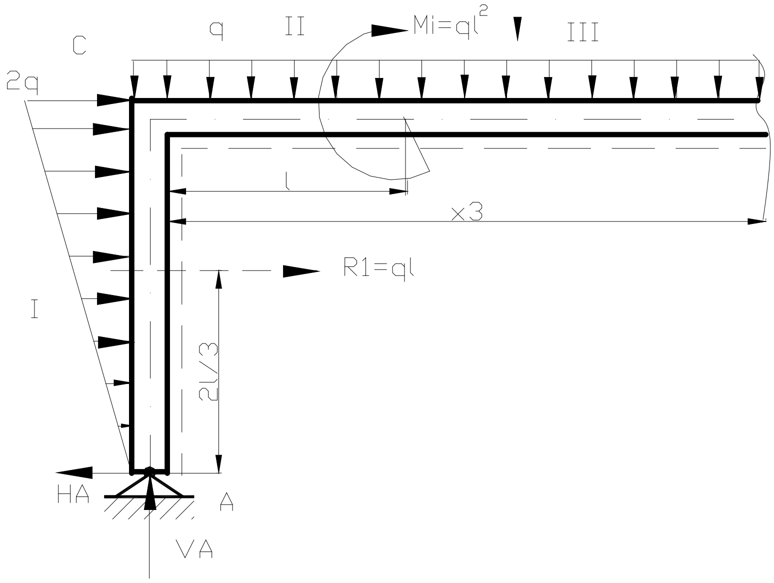


Figura 214

$$\lim_{x_3 \uparrow 3l} M_{iz}(x_3) = \lim_{x_3 \uparrow l} \left(-\frac{qx_3^2}{2} + 0{,}173qlx_3 + 4{,}613ql^2\right) = 0{,}632ql^2 \,.$$

Regiunea a IV-a

$y_4 \in (0;l)$; folosim relaţiile diferenţiale dintre sarcini şi eforturi : $\frac{dN(y_4)}{dy_4} = q_N(y_4)$;

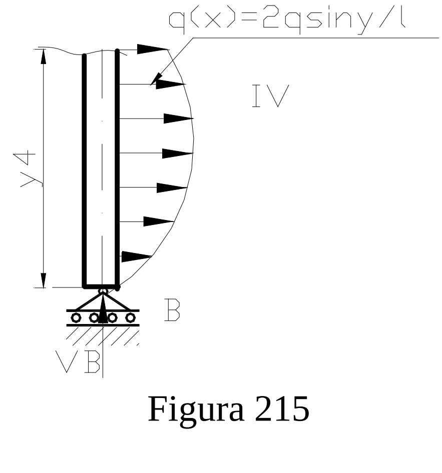


Figura 215

unde $q_N(y_4)$ este forţa axială distribuită pe această regiune , în cazul acesta particular nu avem forţă axială distribuită , deci $q_N(y_4) = 0$ (kN) ; şi vom avea , $\frac{dN(y_4)}{dy_4} = 0$,

$dN(y_4) = 0.dy_4; \int dN(y_4) = \int 0.dy_4; N(y_4) = C_7$. Se află constanta de integrare C_7 din condiţiile iniţiale ale lui Cauchy şi anume ,

$\lim\limits_{y_4 \downarrow 0} N(y_4) = -2{,}824ql = C_7$; deci

$N(y_1) = -2{,}824\ ql$. Acum determinăm forţa tăietoare :

$\frac{dT(y_4)}{dy_4} = -q_T(y_4)$; unde $q_T(y_4)$ este forţa tăietoare distribuită pe această regiune şi are expresia următoare:

$q_T(y_4) = 2q\sin\frac{\pi.y_4}{l}$; implică ;

$$\frac{dT(y_4)}{dy_4} = -q_T(y_4) = -2q\sin\frac{\pi.y_4}{l};$$

$dT(y_4) = -2q\sin\frac{\pi.y_4}{l}dy_4;$ se integrează

$$\int dT(y_4) = \int -2q\sin\frac{\pi.y_4}{l}dy_4; T(y_4) = \frac{2ql}{\pi}\cos\frac{\pi.y_4}{l} + C_8;$$

$$\lim_{y_4 \downarrow 0} T(y_4) = \lim_{y_4 \downarrow 0}\left(\frac{2ql}{\pi}\cos\frac{\pi.y_4}{l} + C_8\right) = 0; C_8 = -\frac{2ql}{\pi};$$

$$T(y_4) = \frac{2ql}{\pi}\cos\frac{\pi.y_4}{l} - \frac{2ql}{\pi}\ ;\ T'(y_4) = -2q\sin\frac{\pi.y_4}{l};\quad T''(y_1) = -\frac{2q}{l}\cos\frac{\pi.y_4}{l};$$

$$\lim_{y_4 \uparrow l} T(y_4) = \lim_{y_4 \uparrow l}\left(\frac{2ql}{\pi}\cos\frac{\pi.y_4}{l} - \frac{2ql}{\pi}\right) = -\frac{4ql}{\pi};$$

$$M_{iz}(y_4) = -\int\left(-\frac{2ql}{\pi}\cos\frac{\pi.y_4}{l} + \frac{2ql}{\pi}\right)dy_4; M_{iz}(y_4) = -\frac{2ql^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi.y_4}{l} +$$

$$+\frac{2qly_4}{\pi} + D_4$$

$$\int dM_{iz}(y_4) = -\int T(y_4)dy_4;$$

$$\lim_{y_4 \downarrow 0} M_{iz}(y_4) = \lim_{y_4 \downarrow 0}\left(-\frac{2ql^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi . y_4}{l} + \frac{2qly_4}{\pi} + D_4\right) = 0; D_4 = 0\,;$$

$$\lim_{y_4 \uparrow l} M_{iz}(y_4) = 0{,}636ql^2\,,\; M_{iz}(y_4) = \left(-\frac{2ql^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi . y_4}{l} + \frac{2qly_4}{\pi}\right).$$

Bibliografie

1. Bârsănescu P. D. , Ciobanu O. , Rezistenţa materialelor , vol.I , Casa de ed. Venus, Iaşi , 1998
2. BelyaevN.M.,*Strength of Materials,* Mir Publishers , Moscow , 1979
3. Buzdugan Gh., *Rezistenţa materialelor* , Editura Academiei , Bucureşti , 1986
4. Cioclov D., *Mecanica ruperii materialelor* , Editura Academiei, Bucureşti , 1977
5. Deutsch I., *Rezistenţa materialelor*, EDP, Bucureşti, 1976
6. Gellert W. , ş.a. (ed) , Mică enciclopedie matematică , Ed. Tehnică , Bucureşti , 1980
7. Goanţă V. , Rezistenţa materialelor , Ed. ,, GH. ASACHI" Iaşi, 2001.
8. Horbaniuc D, *Rezistenţa materialelor,* vol. I , Institutul Politehnic - Iaşi, 1979
9. Leon D . , Deplasări ale barelor drepte solicitate la încovoiere, Ed. Cermi Iaşi , 1999
10. Mareş M., Rezistenţa materialelor - noţiuni fundamentale,Ed.Tehnopess, Iaşi, 2001.
11. Mocanu D.R.,*Încercarea materialelor* , vol. 1-3 , Editura Tehnică , Bucureşti, 1982
12. Mocanu D.R.,*Rezistenţa materialelor* , Editura Tehnică , Bucureşti, 1980
13. Mocanu F . , Rezistenţa materialelor , Ed. Cermi , Iaşi , 1998
14. Ponomariov S.D.ş.a., *Calculul de rezistenţa în construcţia de maşini* , vol.I , Editura tehnică , Bucureşti, 1964
15. Posea N., *Rezistenţa materialelor* , EDP , Bucureşti, 1979
16. Soare M.ş.a., *Rezistenţa materialelor în aplicaţii*, Editura Tehnică , Bucureşti, 1966
17. Stepine P., Resistance des materiaux , Editions Mir , Moscou, 1986
18. Teodorescu . P.P ., Ilie V., *Teoria elasticităţii în mecanica solidelor deformabile* , Editura Dacia , Cluj-Napoca , 1979

19.. Tripa M., *Rezistenţa materialelor* , EDP , Bucureşti, 1967
20. SREN. 10002-1:1995 Materiale metalice. Încercarea la tracţiune.
21. STAS 7926-67 . Încercările metalelor. Incercarea de rezistenţă la forfecare .
22. STAS 1750-90 . Încercările metalelor. Incercarea de la răsucire a sârmelor.
23.SREN. 10045-1:1993. Materiale metalice. Încercarea de încovoiere prin şoc pe epruveta Charpy.Partea 1: Metoda de încercare.
24.SREN. 13170:1993. Materiale metalice. Încercarea de încovoiere prin şoc . Epruvete speciale şi metode de evaluare.
25. STAS 8894 /1-80. Încercările metalelor. Încercarea de rupere prin fluaj a oţelului la temperaturi ridicate. Elemente şi condiţii tehnice de execuţie a încercărilor.
26.STAS 8894 /2-81. Încercările metalelor. Încercarea de rupere prin fluaj a oţelului la temperaturi ridicate. Metode de prelucrare a datelor.
27.STAS 1963 – 81 . Rezistenţa materialelor. Terminologie şi simboluri.